Chapitre 2 : Limite de fonctions.

I Continuité

Définition 1 (Limite finie en un point et continuité)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit a une valeur à "l'intérieur" de I et l un réel. On dira que $\lim_{x \to a} f(x) = l$, si :

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}, \exists \alpha \in \mathbb{R}^{*+} \forall x \in I, \quad |x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

Si f est définie en a alors $f(a) = l$ et on dira alors que f est **continue** en a.

Définition 2 (Continuité sur un segment)

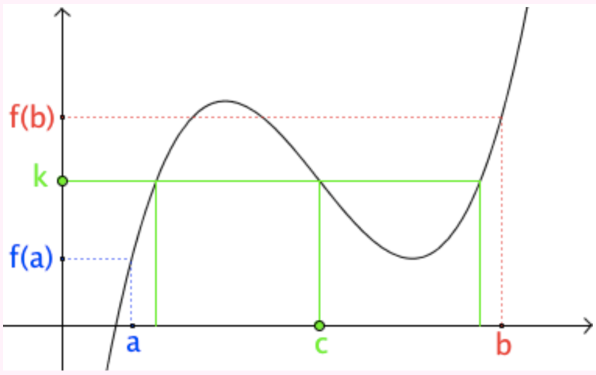
Soit une fonction f définie sur un intervalle I. On dira que f est continue sur I si elle est continue en tous points a de I.

Théorème 1 (Théorème dit usuel)

Toutes les fonctions de référence sont continues sur leur ensemble de définition, ainsi que les polynômes et les factions rationnelles.

Théorème 2 (Théorème des valeurs intermédiaires)

On considère la fonction f définie et continue sur un intervalle [a ; b]. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.



Corolaire 3

Avec les hypothèses du théorème précédent, si la fonction est strictement monotone, la solution est unique.

II Opérations sur les limites

Dans cette partie, on considère f et g deux fonctions et l et l' deux réels. Et soit $a \in \bar{\mathbb{R}}$.

$\lim_{x\to a} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x\to a} (f+g)(x)$						

$\lim_{x\to a} f(x)$	l	$l>0$	$l<0$	$l>0$	$l<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞
$\lim_{x\to a} (f\times g)(x)$									

Dans cette partie, on suppose que g ne s'annule pas sur un voisinage de a. Par ailleurs on choisie la notion $\bar{l} < 0$ pour noté $l < 0$ et $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\bar{l} > 0$	$\bar{l} < 0$	$\bar{l} > 0$	$\bar{l} < 0$	0	∞
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	0^+	0^+	0^-	0^-	0	∞
$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f}{g}(x)$												

Méthode 1 (Cas d'une forme indéterminée)

On retrouve les méthodes soit de factorisation par le terme prépondérant soit avec la *quantité conjuguai.*

Proposition 4 (Composée de fonction.)

Soient f définie de l'intervalle I dons l'intervalle J et g de l'intervalle J dans l'intervalle K. Soit a et b des éléments de $\bar{\mathbb{R}}$ à "l'intérieur" de I et respectivement de J pour b. Soit $l \in \bar{\mathbb{R}}$.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = l$, alors :

$$\lim_{x\to a} (g \circ f)(x) = l$$

Proposition 5 (Comparaison de fonction.)

Soient trois fonctions f, g et h définie sur un intervalle I et $\alpha \in \bar{\mathbb{R}}$ à "l'intérieur" de I. Soit $l \in \mathbb{R}$.

- Si $\forall x \in I, f(x) \leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = -\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = -\infty$.
- Si $\forall x \in I,\ g(x) \leqslant h(x)$ et $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = +\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to\alpha} h(x) = +\infty$.
- Si $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ et $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} h(x) = l$, alors on peut affirmer que g admet une limite en α est cette limite vérifie :
$$\lim_{x\to\alpha} g(x) = l$$
.

III Outils de comparaison.

Proposition 6 (Limite en en point.)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$$

Proposition 7 (Croissante comparée.)

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$

Corolaire 8

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que P ne soit pas constant, on obtient :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{P(x)}{e^x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x)e^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{P(x)} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} P(x)\ln(x) = 0$