Chapitre 3 : Limites de suites .

I Approche Globale.

A Un peu d'histoire.

On fait souvent remonter la récurrence à Euclide , l'exemple habituellement donné est la proposition 20 du livre IX des Éléments, où est prouvée l'existence d'une quantité arbitrairement grande de nombres premiers. Il y a l'esquisse d'une récurrence, mais elle n'est pas explicitée ; en outre l'idée d'une infinité de nombres premiers est absente. Euclide : 300 av. J.-C.

Vers l'an 1000, le persan Al-Karaji établit la formule du binôme de Newton (en fait il n'a pas les notations qui lui permettraient de l'énoncer dans le cas général, mais les méthodes fonctionnent pour un entier arbitraire). Il calcule également la somme des cubes des n premiers entiers naturels, al-Samaw'al poursuit ses travaux. Al-Karaji (953-1029) Newton : 1643 -1727

Nicolas Oresme , mathématicien français du XIV siècle a étudié les suites arithmétiques et géométriques ainsi que la somme des termes de certaines d'entre-elles. Oresme est le premier à utiliser le Français dans les textes mathématiques, il est aussi persuadé, bien avant Galilée, de la rotation de la Terre autour du Soleil. Il a inventé, avant Descartes, le premier système de coordonnées. *Oresme 1320-1382*

L'idée de fonction est plus récente, elle date des $XVII$ et $XVIII$ siècles.

Les mathématiciens ont alors montré qu'une suite est une fonction particulière.

Les fondements rigoureux de la théorie des suites sont posés au début du XIX siècle par le français Augustin Cauchy , l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps. *Cauchy 1789-1857*

B Programme

En classe de première, l'étude des suites est abordée sous un angle essentiellement algébrique. En classe terminale, on commence l'étude de la convergence.

La notion de limite est présentée de manière intuitive, en s'appuyant notamment sur la vision géométrique et sur l'écriture décimale. On explicite ensuite les définitions mais la maîtrise complète du formalisme n'est pas un attendu.

Les objectifs sont plutôt d'installer une pratique solide des aspects opératoires (détermination de limites) et d'introduire la problématique des théorèmes d'existence, notamment la convergence d'une suite croissante majorée.

Lors de l'étude d'une suite, on distingue les aspects globaux des aspects asymptotiques. Les élèves doivent disposer d'un répertoire d'exemples suffisamment riche pour éviter les confusions entre propriétés.

Les suites interagissent avec les autres parties du programme. Outre leurs interventions en analyse, de nombreux problèmes de probabilités conduisent naturellement à étudier un modèle probabiliste dépendant d'un entier n.

1 Contenus

- La suite (u_n) tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $[A, +\infty[$ contient toutes les valeurs (u_n) à partir d'un certain rang. Cas des suites croissantes non majorées. Suite tendant vers $-\infty$.
- La suite (u_n) converge vers le nombre réel ℓ si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang.
- Limites et comparaison. Théorèmes des gendarmes.
- Opérations sur les limites.
- Comportement d'une suite géométrique q^n où q est un nombre réel.
- Théorème de convergence monotone : toute suite croissante majorée (ou décroissante minorée) converge.

2 Capacité attendus.

- Tous les attendus de première.
- Établir qu'une suite diverge vers $+\infty$. *(1 page 45)*
- Établir qu'une suite converge. *(2 page 45)*

- Raisonner par récurrence pour établir une propriété d'une suite.
- Étudier des phénomènes d'évolution modélisables par une suite.
- Utiliser un théorème de comparaison *(8 page 47)*
- Utiliser le théorème des gendarmes. *(9 page 47)*
- Savoir compléter intuitivement les tableaux sur les opérations et limites. *(page 48)*
- Savoir appliquer les règles d'opération sur les suites. *(19-20 page 49)*
- Savoir représenter une suite récurrente et en déduire les variation et limite à partir de cette représentation.
- Savoir programmer une suite récurrente sur la calculatrice et sous forme algorithme (avec Python par exemple). **V** 1. Calculatrice
- Savoir étudier la limite d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$:
  - Montrer que la limite si elle existe ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$ quand f est continue.
  - Savoir utiliser un raisonnement par l'absurde pour justifier qu'une suite n'a pas de limite.

3 Démonstrations à connaître.

- Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
- Limite de q^n, après démonstration par récurrence de l'inégalité de *Bernoulli*.
- Divergence vers $+\infty$ d'une suite minorée par une suite divergeant vers $+\infty$.
- Limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction exponentielle.

4 Exemples d'algorithme

- Recherche de seuils.
- Recherche de valeurs approchées de π, e, $\sqrt{2}$, $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\ln(2)$, ect...

5 Approfondissements

- Propriétés et utilisation des suites adjacentes.
- Exemples de suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
- Exemples d'application de la méthode de Newton.
- Étude de la convergence de la méthode de Héron.

II Comportement d'une suite à l'infini

A Convergence

Définition 1

Soit l un réel et (u_n) une suite.
On dit que la suite (u_n) converge vers l si pour tout intervalle **ouvert** contenant l il existe un rang à partir duquel tout les u_n sont contenus dans cet intervalle.
On dit alors que l est la **limite** de la suite (u_n) et on note $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
Si une suite ne converge pas, on dit que la suite est **divergente**.

Remarque 1. Il y a deux types de divergence : les suites ayant une limite infinie ou celles qui n'ont pas de limite.

Exemple 1. Les suites de termes générales $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{n^p}$ avec p un réel positif convergent toutes vers 0.

Démonstration pour $\frac{1}{n}$ *:* Soit (u_n) la suite de terme général $\frac{1}{n}$ et α un réel non nul.
On note alors n_0 le plus petit entier tel que $n_0 > \frac{1}{\alpha}$. Ainsi pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \in]0-\alpha; 0+\alpha[$. □

Proposition 1

Lorsqu'une suite admet une limite finie alors cette limite est unique.

Démonstration 1. Raisonnement par l'absurde.
On suppose l'existence d'une suite (u_n) qui tendrait vers deux limites distinctes l et l' (avec $l < l'$).
Alors, on choisit $\epsilon = \dfrac{l'-l}{3}$ et $I =]l-\epsilon; l+\epsilon[$ et $I' =]l'-\epsilon; l'+\epsilon[$.
Du fait de la définition de limite :

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_1 \Rightarrow u_n \in I \quad \text{et} \quad \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_2 \Rightarrow u_n \in I'$$

Si l'on note $n_0 = \mathrm{Max}(n_1, n_2)$ alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \in I \cap I'$$

Or $I \cap I' = \varnothing$, d'où la contradiction.

B Limite infinie.

Définition 2 (Limite infinie)

Soit (u_n) une suite.
On dit que (u_n) admet pour limite $+\infty$ si pour tout A réel alors il existe un rang à partir duquel tout les termes de la suite sont contenus dans l'intervalle $]A; +\infty[$.
On écrit alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Remarque 2. On peut écrire une définition similaire pour une limite de $-\infty$.

Exemple 2. Les suites de termes générales n, n^2, n^2-3n+1 .

Démonstration 2 (Démonstration pour n^2 :). Soit (u_n) la suite de terme général n et α un réel non nul.
On note alors n_0 le plus petit entier tel que $n_0 > \sqrt{A}$. Ainsi pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n > A$.

Ex 1 à 12 page 60

III Limites des suites *connues*

<table>
<tr><th></th><th>Suite arithmétique</th><th>Suite géométrique</th></tr>
<tr><td>Formule de récurrence.</td><td>• $u_{n+1} = u_n + r$ (où r est la raison)
Si $u_{n+1} - u_n = r$ alors (u_n) est arithmétiques de raison r.</td><td>• $v_{n+1} = q \times v_n$ (où q est la raison)
Si $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = q$ alors (v_n) est géométrique de raison q.</td></tr>
<tr><td>Limite</td><td>• Si $r > 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
• Si $r < 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.</td><td>• Si $0 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
• Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$.
• Si $1 < q$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.</td></tr>
<tr><td>Variation</td><td>• Si $r > 0$ la suite (u_n) est croissante.
• Si $r < 0$ la suite (u_n) est décroissante.</td><td><table><tr><td></td><td>1^{ier} terme > 0</td><td>1^{ier} terme < 0</td></tr><tr><td>Si $-1 < q < 1$</td><td>$u_n \searrow 0$</td><td>$u_n \nearrow 0$</td></tr><tr><td>Si $q = 1$</td><td>u_n constante</td><td>u_n constante</td></tr><tr><td>Si $1 < q$</td><td>$u_n \nearrow +\infty$</td><td>$u_n \searrow -\infty$</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>Expression en fonction de n.</td><td>• $u_n = nR + u_0$.
• $u_n = (n-k)r + u_k$.</td><td>• $v_n = q^n v_0$.
• $v_n = q^{n-k} v_k$.</td></tr>
</table>

Démonstration 3. Utilisation de l'inégalité de Bernoulli

Exemple 3.
- Une population qui augmenterait de 10% par an.
- Une population qui diminuerait de 10% par an.
- Une population qui augmenterez de 1000 par an.

Exemple 4. Une suite géométrique de premier terme $u_0 = -1$ et de raison $0,5$. Déterminons ses variations et sa limite.

Ex 26 à 34 page 62-63

IV Opérations sur les limites

Dans cette partie, on considère (u_n) et (v_n) deux suites et l et l' deux réels.

A Limite d'une somme.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n$						

V 2. Opération sur les limites 1

B Limite d'un produit.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	l	$l>0$	$l<0$	$l>0$	$l<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n$									

C Limite d'un quotient.

Dans cette partie, on suppose que v_n ne s'annule pas. Par ailleurs on choisie la notion $\bar{l}<0$ pour noté $l<0$ et $-\infty$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\bar{l}>0$	$\bar{l}<0$	$\bar{l}>0$	$\bar{l}<0$	0	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$l'\neq 0$	$\pm\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	0^+	0^+	0^-	0^-	0	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$												

Ex 13 à 19 page 59-60

D Indéterminations.

1 Théorème de croissance comparée

Proposition 2

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^n}{n} = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to-\infty} ne^n = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$
- $\lim\limits_{n\to 0^+} n\ln(n) = 0$

2

On constate plusieurs cas d'indétermination dans les tableaux précédents.

Exemple 5. Les suites dont les termes généraux sont :

- $u_n = n^2 - 3n$
- $v_n = \dfrac{5n^2+3}{2n^2-3n+1}$
- $w_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$
- $t_n = n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$

V 3. exemple 1
V 4. exemple 2
V 5. exemple3
V 6. exmple 4

Ex 44 page 64

V Cas de convergence

A Comparaison de suites.

Proposition 3 (Théorème des gendarmes)

Soient trois suites (u_n), (v_n) et (w_n). Soit $l \in \mathbb{R}$.

- Si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$, alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.
- Si $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant w_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$, alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = +\infty$.
- Si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = l$, alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l$.

Démonstration 4. Si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$. Soit $A \in \mathbb{R}$, alors :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow v_n \leqslant A$$

Or $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n$, donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n \leqslant A$$

Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration 5. Démonstration similaire.

Démonstration 6. Si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = l$,
Soit $\epsilon > 0$,
Du fait de la définition de limite :

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_1 \Rightarrow u_n \in]l-\epsilon, l+\epsilon[\quad \text{et} \quad \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_2 \Rightarrow w_n \in]l-\epsilon, l+\epsilon[$$

Si l'on note $n_0 = \text{Max}(n_1, n_2)$ alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow l - \epsilon \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant L + \epsilon$$

Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l$.

Ex 20 à 25 page 62

B Théorèmes de convergence dominée.

Définition 3

Soit (u_n) une suite réelle.

- La suite (u_n) est dite majorée si : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$
- La suite (u_n) est dite minorée si : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant m$
- La suite (u_n) est dite bornée si : $\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n \leqslant M$

Remarque 3. Attention !! Le majorant M doit être indépendant de n. Idem pour m.

Proposition 4

- Toute suite croissante majorée est convergente.
- Toute suite décroissante minorée est convergente.

Remarque 4. Si une suite est majorée par M et croissante, alors elle est convergente et sa limite est un majorant et même le plus petit des majorants.

Ex 35 à 40 page 63

C Suites récurrentes.

Soit f une fonction réelle et (u_n) la suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Comme vu en première, nous pouvons représenter les premiers termes de la suite (u_n) en utilisant les représentations de la première bissectrice et de la fonction f.

Dés lors nous pouvons effectuer un certain nombre de conjectures :

- Sens de variation.
- Limite
- Variation des termes pairs ou impairs.
- ....

Exemple 6. Pour une suite récurrente avec une fonction f croissante mais pas "*trop* "

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6} \end{cases}$$

On observe que

- si $-6 \leqslant u_0 < 3$ alors la suite est croissante et converge vers 3
- si $u_0 > 3$ alors la suite est décroissante et converge vers 3

Voyons les méthodes classique de démonstration de ces conjecture avec l'utilisation des théorèmes de convergence dominé et la continuité de la fonction f.

Exemple 7. Pour une suite récurrente avec notamment une fonction f croissante mais "*trop* "

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{2}u_n - 1 \end{cases}$$

On observe que

- si $u_0 < 2$ alors la suite est décroissante et diverge vers $-\infty$
- si $u_0 > 2$ alors la suite est croissante et diverge vers $+\infty$

Voyons les méthodes classique de démonstration de ces conjecture avec notamment l'utilisation des théorèmes de convergence dominé et la continuité de la fonction f.

Ex 72-73 page 137 ; 34-35 page 133 ; 77 page 70

V 7. Méthode *"à la main"*.

V 8. Avec la Ti

V 9. Avec la Casio

V 10. Représentation d'une suite récurrente