Chapitre 3 : Probabilité conditionnelle.

Notation : Dans l'ensemble du chapitre, on considérera Ω comme l'univers des possibles. (Par exemple pour le lancer d'un dé à 6 faces $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.)

I Générale

A Un peu d'histoire.

La théorie des probabilités est une mathématisation de l'incertitude et du caractère imprévisible des phénomènes. L'incertitude de la situation présente et à venir a d'abord été attribuée au destin, à la nature ou à des divinités.

Les philosophes de la Grèce antique ont abordé la question de la définition du concept d'incertitude. Le concept de probable chez Aristote est défini dans les Topiques :

Aristote : IV siècle av. J.-C.

« Sont probables les opinions qui sont reçues par tous les hommes, ou par la plupart d'entre eux, ou par les sages, et parmi ces derniers, soit par tous, soit par la plupart, soit enfin par les plus notables et les plus illustres »

Ce qui rend une opinion probable chez Aristote est son caractère généralement admis.

Le véritable début de la théorie des probabilités date de la correspondance entre Pierre de Fermat et Blaise Pascal en 1654 au sujet d'une désormais célèbre question posée par Antoine Gombaud : (dit chevalier de Méré) : le problème des partis ou problèmes des points. « Il avait pour objet de déterminer la proportion suivant laquelle l'enjeu doit être partagé entre les joueurs lorsqu'ils conviennent de ne point achever la partie, et qu'il leur reste à prendre pour la gagner, des nombres de points inégaux. »

Fermat 1607-1665
Pascal : 1623-1662
Méré 1607-1684

Dans sa version la plus simple, est le suivant : deux joueurs jouent à un jeu de hasard en 3 parties gagnantes, chacun ayant misé la même somme d'argent m ; or il se trouve que le jeu est interrompu avant que l'un des deux joueurs ait obtenu 3 victoires et ainsi remporté la victoire et de ce fait la totalité des enjeux soit 2m. Comment, dans ces circonstances, doit-on partager les enjeux ?

Pascal en donna le premier la solution, mais pour le cas de deux joueurs seulement ; il fut ensuite résolu pour Fermat, dans le cas général d'un nombre quelconque de joueurs.

B Attendus.

- Connaitre l'ensemble des formules de la proposition 1 et leur correspondance en terme d'ensemble.
- Savoir différentier probabilité conditionnelle de la probabilité d'une intersection.
- Connaitre les règles régissant la construction d'un arbre. *méthode 2*
- Déterminer des probabilités conditionnelles dans des cas simples ou à partir d'un tableau de données. *1-2 page 277*
- Savoir construire un arbre à partir des données de l'énoncé. *1 page 279* et ***méthode 3***
- A partir d'un arbre :
  - Savoir interpréter chacune des pondérations de chaque branche. (*Probabilité conditionné par le nœud précédent pour le nœud suivant.*)
  - Savoir déterminer la probabilité d'une intersection (*Branche complète : l'ensemble des branches de l'origine à l'extrémité.*) ***méthode 4*** *et 2 page 279*
  - Savoir calculer une probabilité total. *(Somme des branches complètes finissant par l'évènement dont on veut calculer la probabilité totale.)* *méthode 1 et 5*
- Savoir déterminer une probabilité conditionnelle en utilisant la formule :

$$P_C(A) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} \quad \textbf{\textit{méthode 6}}$$

- Obtenir un arbre inverse. ***méthode 7***
- Savoir calculer tout type de probabilité à partir d'un tableau de données. *Voir exercice 1*
- Étudier l'indépendance de deux évènements *1 page 281*
- Répétition d'expérience. *2 page 281*

II Probabilité conditionnelle.

A Exemple de situation.

Exercice 1. Un établissement décide d'organiser un Cross auquel la présence n'est pas obligatoire.

Sur les 540 élèves :

- un tiers sont des élèves de seconde.
- 160 sont des élèves de première.
- 40 % ont décidé de participer au Cross.

.

Par ailleurs :

- 25 % des élèves de seconde décident de participer au Cross.
- Il y a autant de premières qui ont participé au Cross que de terminales.

Compléter un tableau suivant :

	Nombre d'élèves ayant participé au Cross : C	Nombre d'élèves n'ayant pas participé au Cross : $\bar{C}$	Total
Élèves de seconde : On notera l'évènement E_2			
Élèves de première : On notera l'évènement E_1			
Élèves terminale : On notera l'évènement E_T			
Total			

Une semaine après, Arthur, qui s'occupe du journal du lycée, décide d'interroger à l'entrée de l'établissement les élèves sur leur ressenti sur le Cross. Il choisit donc un élève au hasard. Complétez le tableau suivant :

Attention ici nous n'avons pas encore de probabilité conditionnelle.

Question :	Notation	Calculs et résultats
Probabilité que ce soit un élève qui est participé au Cross.	$P(C)$	
Probabilité que ce soit un élève qui n'est pas participé au Cross.		
Probabilité que ce soit un élève de seconde		
Probabilité que ce soit un élève de première		
Probabilité que ce soit un élève de terminal		
Probabilité que ce soit un élève de seconde **et** qu'il est participé au Cross	$P\left(E_2 \cap C\right)$	
Probabilité que ce soit, un élève de seconde **ou** qui est participé au Cross	$P\left(E_2 \cap C\right)$	

Arthur va a une réunion où ne sont présent que les élèves qui ont participé au Cross. Il décide d'interroger un élève au hasard à la sortie de la réunion. Il **sait** donc que l'élève interrogé a participé au Cross. Compléter le tableau ci-dessous :

Nous calculons ici nos premières probabilités conditionnelles.

Question :	Notation	Calculs
Probabilité que ce soit un élève de seconde **sachant** qu'il a participé au Cross	$P_C(E_2)$	
Probabilité que ce soit un élève de première **sachant** qu'il a participé au Cross		
Probabilité que ce soit un élève de terminal **sachant** qu'il a participé au Cross		

B Probabilité conditionnelle : Définition.

Définition 1

Soit A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$.
On appelle probabilité conditionnelle de B sachant A , la probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé. Elle est notée $P_A(B)$ ou $P(B/A)$ et est définie par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Exercice 2. On dispose de deux urnes :

- L'urne U, avec 2 boules rouges et une boule noire.
- L'urne V, avec 1 boule rouge et une boule noire.

On lance un dé à 6 faces. Si l'on obtient :

- 1 (événement que l'on notera A) on tire une boule dans l'urne U.
- Sinon (événement que l'on notera $\bar{A}$), on tire une boule dans l'urne V.

On note :

- R l'évènement : "on obtient une boule rouge lors du tirage".
- N l'évènement : "on obtient une boule noire lors du tirage".

Complétez le tableau si dessous :

Question :	Notation	Résultats
La probabilité d'obtenir "1" lors du lancé.		
La probabilité d'obtenir une boule rouge sachant que l'on a obtenu "1" lors du lancer de dé.		
	$P_A(N)$	
	$P_{\bar{A}}(R)$	

Exercice 3. On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

***Vidéo* 1.** Corrigé en vidéo.

- Soit A l'événement "Le résultat est un pique".
- Soit B l'événement "Le résultat est un roi".

1. $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ et enfin $P(A \cup B)$.
2. Déterminer $P_A(B)$ et $P_B(A)$.

C Propriétés.

Similitude avec les propriétés des probabilités non conditionnelle :

Proposition 1

Soit A, B et C trois évènements avec $P(C) \neq 0$, alors :

• $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$	• $0 \leqslant P_C(A) \leqslant 1$
• $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$	• $P_C(\bar{A}) = 1 - P_C(A)$
• $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	• $P_C(A \cup B) = P_C(A) + P_C(B) - P_C(A \cap B)$

Et la propriété fondamentale :

$$\bullet P_C(A) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} \Leftrightarrow P(A \cap C) = P(C) \times P_C(A)$$

On remarque ici que les formules de seconde reste vrai "dans l'univers C"

***Remarque* 1.** Les formules vues en seconde reste vrai dans "l'univers C".

***Remarque* 2.** Si $C = \Omega$ alors $P_\Omega(A) = P(A)$ et $P(A \cap \Omega) = P(A)$ donc la dernière formule devient évidente :

$$P(A) = P_\Omega(A) = \frac{P(A \cap \Omega)}{P(\Omega)} = \frac{P(A)}{1} = P(A)$$

D Indépendance d'évènements.

Exercice 4. On reprend l'exercice précédent :

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Mais cette fois-ci l'on retire une carte : le 7 de pique.

- Soit A l'événement "Le résultat est un pique".
- Soit B l'événement "Le résultat est un roi".

1. $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ et enfin $P(A \cup B)$.
2. Déterminer $P_A(B)$ et $P_B(A)$.

Définition 2

Soient A et B deux événements sont indépendants si :

$$P\left(A \cap B\right) = P(A) \times P(B))$$

Proposition 2

Soient A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. Alors les 5 propositions suivantes sont équivalentes :

- $P\left(A \cap B\right) = P(A) \times P(B)$
- $P_A(B) = P(B)$
- $P_B(A) = P(A)$
- $P_A(B) = P_{\bar{A}}(B)$
- $P_B(A) = P_{\bar{B}}(A)$

III Arbre pondéré.

A Exemple.

Exemple 1. Un établissement décide d'organiser une journée d'information sur les filières post-bac. Cette fois les répartitions sont les suivantes :

Sur les 540 élèves :

- un tiers sont des élèves de seconde.
- un quart sont des élèves de première.

Par ailleurs :

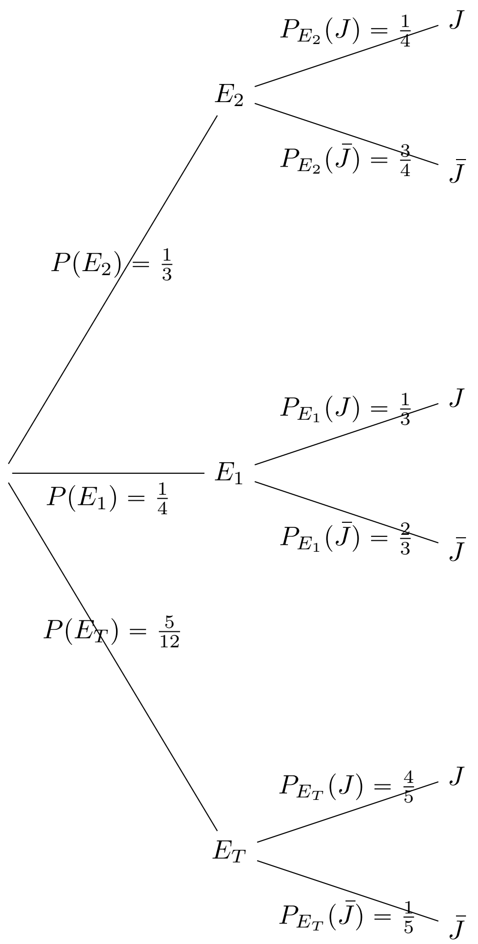
- 25 % des élèves de seconde décident de participer à cette journée.
- Un tiers des élèves de première décident de participer à cette journée.
- Les $\dfrac{4}{5}$ des élèves de terminale décident de participer à cette journée.

Nous obtenons le tableau suivant :

	Nb d'élèves participant à cette journée J	Nb d'élèves n'ayant pas participé à cette journée : $\bar{J}$	Total
Élèves de seconde : E_2	50	150	200
Élèves de première : E_1	50	100	150
Élèves terminale : E_T	200	50	250
Total	300	300	600

Une semaine plus tard, Arthur (un élève qui travaille au journal du lycée) décide d'interroger les élèves du lycée sur cette journée. Il choisit au hasard un élève dans la cours.

Nous pouvons traduire cette situation sous forme d'arbre :



$$P\left(E_1 \cap \bar{J}\right) = P(E_1) \times P_{E_1}(\bar{J}) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

L'arbre permet de déterminer les probabilités des intersections notamment :

$$P\left(A \cap C\right) = P(C) \times P_C(A)$$

Pour déterminer la probabilité que l'on interroge un élève de première n'ayant pas été à la journée :

$$P\left(E_1 \cap \bar{J}\right) = P(E_1) \times P_{E_1}(\bar{J})$$

Voir le calcul au niveau de l'arbre ci-dessus.
Remarquons ici que la pondération entre le nœud E_1 et le nœud $\bar{J}$ représente :
• La probabilité d'interroger un élève n'ayant pas participé au Cross, sachant qu'Arthur interroge un élève de première (probabilité conditionnelle)
Alors que la *branche complète* du nœud d'origine à l'extrémité $\bar{J}$ (c'est-à-dire : $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$) représente :
• La probabilité d'interroger un élève de première (**et**) qui n'a pas participé à la journée. (intersection)

B Formule de probabilité totale.

Définition 3

On dit que les évènements A_1, A_2, ... , A_n forment une partition de l'univers Ω si leur intersection deux à deux est vide et leur union est Ω.

Exemple 2. Si l'on reprend l'exemple précédent, les évènements E_T, E_1 et E_2 forment une partition de l'ensemble des élèves du lycée :

- Par exemple, on ne peut pas être à la fois en première et terminale .
- La réunion des trois niveaux constitue bien l'ensemble des élèves du lycée.

Exemple 3. Si l'on reprend l'exemple précédent, les évènements J, et $\bar{J}$ forment une partition de l'ensemble des élèves du lycée :

- Un élève ne peut pas à la fois assister à la Journée et ne pas y assister.
- Un élève a soit assister soit il n'a pas assister à la journée. Donc l'union forme bien l'ensemble des élèves du lycée.

Proposition 3

Formule des probabilités totales :
Si les évènements A_1, A_2, ... , A_n forment une partition de l'univers Ω, et B un évènement, alors :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + ... + P(A_n \cap B)$$

Remarque : *Un évènement et son contraire constitue toujours une partition de l'univers.*

Graphique.

Corolaire 4

Avec les notations de la propriété précédente :

$$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + ... + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$$

Démonstration 1. Il suffit pour cela d'utiliser la formule :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

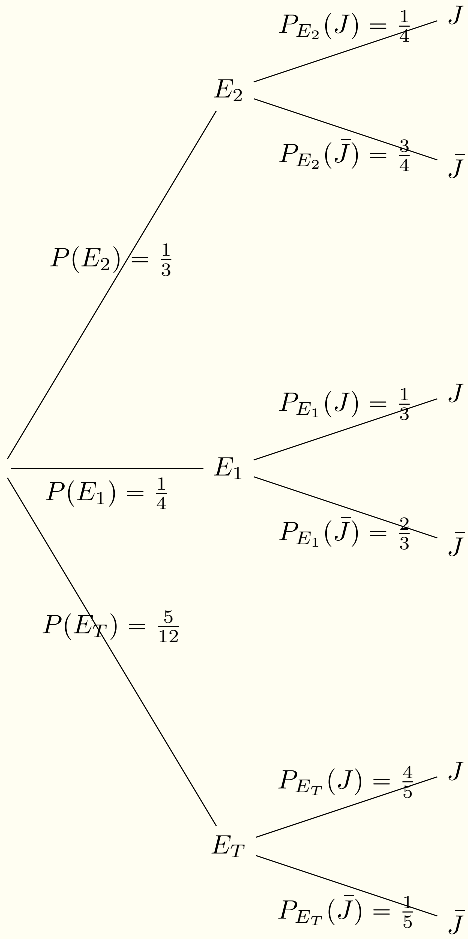
Exemple 4. Si l'on reprend l'exemple précédent en utilisant la partition formé des évènements E_T, E_1 et E_2, pour déterminer la probabilité de J (c'est à dire qu'Arthur interroge un élève ayant participé à la journée d'information) :

$$P(J) = P(E_T) \times P_{E_T}(J) + P(E_1) \times P_{E_1}(J) + P(E_2) \times P_{E_2}(J) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{5}{12} \times \frac{4}{5} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$$

Graphique.

Méthode-exemple 1 (Utilisation : probabilité totale)

Comment procédé pour utiliser la formule de probabilité totale en utilisant un arbre :



$$P(E_2 \cap J) = P(E_2) \times P_{E_2}(J) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$P(E_1 \cap J) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

$$P(E_T \cap J) = \frac{5}{12} \times \frac{4}{5} = \frac{1}{3}$$

Pour déterminer la probabilité de J en utilisant l'arbre, on peut simplement faire la somme des *branches complètes* finissant par J :

$$P(J) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

Corolaire 5

Soit A et B deux évènements de ω, alors

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

Graphique.

C Règles de fonctionnement d'un arbre pondéré.

Méthode-exemple 2

- La somme des probabilités des *branches* issues d'un même nœud est égale à 1 : **La somme des probabilités (conditionnelle) issues de E_2 est bien égale à 1 (en effet $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$.**
- La probabilité d'une *branche complète* est la probabilité de l'intersection des évènements la constituant et est obtenue par le produit des pondérations.

$$P(E_2 \cap J) = P(E_2) \times P_{E_2}(J) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

- (Formule des probabilités totales) La probabilité d'un évènement de *dernier niveau* est obtenu en faisant la somme des probabilités des *branches complètes* finissant par cet événement.

$$P(J) = P(E_T)\times P_{E_T}(J)+P(E_1)\times P_{E_1}(J)+P(E_2)\times P_{E_2}(J) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{5}{12}\times\frac{4}{5} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$$

Faire attention qu'à chaque niveau de l'arbre, les évènements le constituant forme bien une partition de l'univers :

— Les évènements E_T, E_1 et E_2 forment une partition de l'ensemble des élèves du lycée.

— Les évènements J, et $\bar{J}$ forment une partition de l'ensemble des élèves du lycée.

D Récapitulatif de certains attendus sur un exemple.

Énoncé : On dispose de deux urnes :

- L'urne U, avec 2 boules rouges et une boule noire.
- L'urne V, avec 1 boule rouge et une boule noire.

On lance un dé à 6 faces. Si l'on obtient :

- 1 (événement que l'on notera A) on tire une boule dans l'urne U.
- Sinon (événement que l'on notera $\bar{A}$), on tire une boule dans l'urne V.

On note :

- R l'évènement : "on obtient une boule rouge lors du tirage".
- N l'évènement : "on obtient une boule noire lors du tirage".

Méthode-exemple 3

Obtenir l'arbre pondéré :

Première application des règles liés aux arbres

On détermine les probabilités du premier niveau :

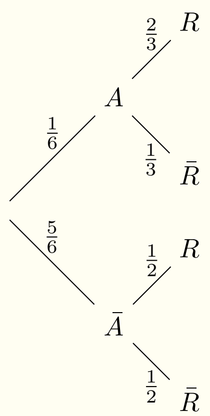
$P(A) = \frac{1}{6}$ *donc* $P(\bar{A}) = 1-P(\bar{A}) = \frac{5}{6}$

Puis les probabilité conditionnelles du deuxième niveau :

$P_A(R) = \frac{2}{3}$ *donc* $P_A(\bar{R}) = 1-P_A(R) = \frac{1}{3}$.

Par ailleurs :

$$P_{\bar{A}}(R) = \frac{1}{2} \quad donc \quad P_{\bar{A}}(\bar{R}) = \frac{1}{2}$$

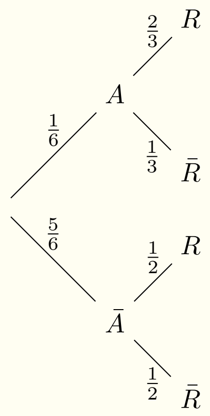


D'où l'arbre :

Méthode-exemple 4 (**Pour déterminer la probabilité d'une intersection.**)

Par exemple, pour déterminer la probabilité *"d'avoir obtenu "1"* ***et*** *d'avoir tiré une boule rouge "* :

Attention à ne pas confondre $P(A \cap R)$ et $P_A(R)$

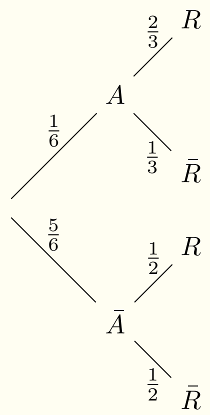


$$P(A \cap R) = P(A) \times P_A(R) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{9}$$

Méthode-exemple 5 (**Pour déterminer une probabilité totale :**)

Par exemple celle de l'évènement R : "obtenir une boule rouge".

On effectue "La somme des branches finissant par R"



$$P(A \cap R) = P(A) \times P_A(R) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{9}$$

$$P(\bar{A} \cap R) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(R) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$$

Donc $P(R) = P(A \cap R) + P(\bar{A} \cap R) = \frac{1}{9} + \frac{5}{12} = \frac{19}{36}$

Méthode-exemple 6 (**Déterminer la probabilité conditionnelle d'un *niveau 1* relativement à un *niveau 2* :**)

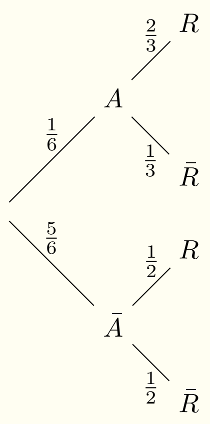
Imaginons maintenant que l'on arrive après le tirage de la boule et que l'on voit quelle est rouge. Ceci sans connaitre le résultat du lancé du dé. Sachant que la boule tirée est rouge quelle est la probabilité que l'on est obtenu "1" lors du lancé :

$$P_R(A) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{19}{36}} = \frac{1 \times 36}{9 \times 19} = \frac{4}{19}$$

(C'est ce que l'on fait quand on applique la formule de Baye)

Remarque : *On remarque ici que $P(A) = \frac{1}{6}$ alors que $P_R(A) = \frac{4}{19} > \frac{1}{6}$. Or ceci est logique puisqu'il y a deux fois plus de boule rouge dans l'urne U.*

Méthode-exemple 7 (Obtenir l'arbre inverse :)



$$P(A \cap R) = P(A) \times P_A(R) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{9}$$

$$P(A \cap \bar{R}) = \frac{1}{18}$$

$$P(\bar{A} \cap R) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(R) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{R}) = \frac{5}{12}$$

Donc

$$P(\bar{R}) = \frac{1}{18} + \frac{5}{12} = \frac{17}{36}$$

Puis :

$$P_{\bar{R}}(A) = \frac{P(A \cap \bar{R})}{P(\bar{R})} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{17}{36}} = \frac{36}{18 \times 17} = \frac{2}{17}$$

On obtient donc l'arbre inverse :