Chapitre 3 : Résumé probabilité conditionnelle.

I Probabilité conditionnelle.

Définition-Proposition 1

Soit A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$.
On appelle probabilité conditionnelle de B sachant A , la probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé. Elle est notée $P_A(B)$ ou $P(B/A)$ et est définie par :

$$P_A(B) = \frac{P\left(A \cap B\right)}{P(A)} \qquad \text{et} \qquad \underbrace{P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)}_{\text{fondamentale pour la construction des arbres}}$$

Soit A, B et C trois évènements avec $P(C) \neq 0$, alors :

- $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

- $0 \leqslant P_C(A) \leqslant 1$
- $P_C(\bar{A}) = 1 - P_C(A)$
- $P_C(A \cup B) = P_C(A) + P_C(B) - P_C(A \cap B)$

Définition-Proposition 2 (Indépendance d'évènements.)

Soient A et B deux événements sont indépendants si : $P\left(A \cap B\right) = P(A) \times P(B))$
Si de plus $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. Alors les 5 propositions suivantes sont équivalentes :

- $P\left(A \cap B\right) = P(A) \times P(B)$
- $P_A(B) = P(B)$
- $P_B(A) = P(A)$
- $P_A(B) = P_{\bar{A}}(B)$
- $P_B(A) = P_{\bar{B}}(A)$

II Arbre pondéré.

Méthode-exemple 1 (Règles de fonctionnement d'un arbre pondéré.)

- La somme des probabilités des *branches* issues d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité d'une *branche complète* est la probabilité de l'intersection des évènements la constituant et est obtenue par le produit des pondérations.
- (Formule des probabilités totales) La probabilité d'un évènement de *dernier niveau* est obtenu en faisant la somme des probabilités des *branches complètes* finissant par cet événement.

Définition-Proposition 3 (Formule des probabilités totales)

Soit A et B deux évènements alors

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

On dit que les évènements A_1, A_2, ... , A_n forment une **partition** de l'univers Ω si leur intersection deux à deux est vide et leur union est Ω.

Si les évènements A_1, A_2, ... , A_n forment une partition de l'univers Ω, et B un évènement, alors :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + ... + P(A_n \cap B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + ... + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$$