# Chapitre 4 : droite, plan et vecteurs de l'espace.

Nous nous plaçons dans ce chapitre dans l'espace $\mathcal{E}$.

## I Les attendus

- Positions relatives. *Page 271*
- Construire une section. *Page 273*
- Démontré l'orthogonalité de deux droites. *Page 275*
- Appliquer le théorème du "toit". *Page 273*

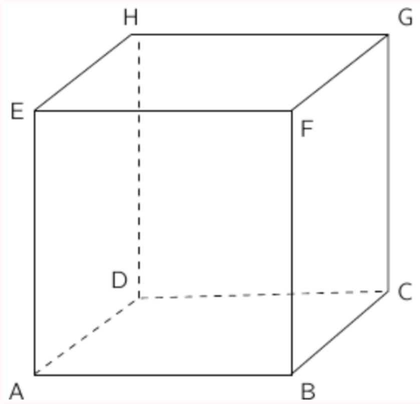
## II Position relative de droite et de plan : exemple cube

### A Positions relatives de deux droites.

**Proposition 1**

La position relative de deux droites de $\mathcal{E}$ :

- Coplanaires (elles appartiennent au plan) :
  - Sécantes avec la cas particulier où elles sont perpendiculaires
  - Parallèles
  - Confondues
- Non coplanaires, avec le cas particulier elles sont orthogonales sans être sécantes.



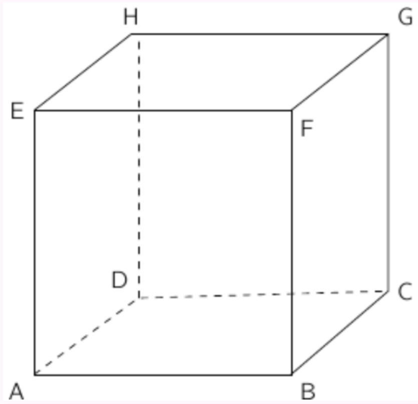

**Figures exemples :**

## B Positions relatives d'une droite et d'un plan : exemple cube

**Proposition 2**

La position relative d'une droite et d'un plan de $\mathcal{E}$ :

- Sécante, avec le cas particulier où la droite et le plan sont perpendiculaires
- Parallèles



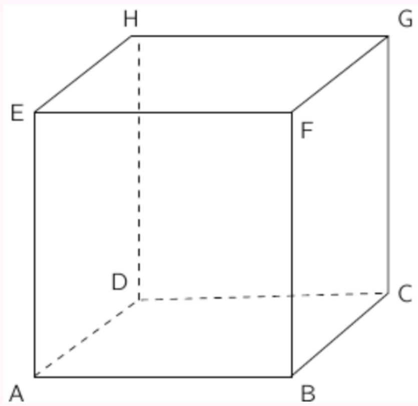

**Figures exemples :**

## C Positions relatives de deux plans : exemple cube

**Proposition 3**

La position relative deux plans de $\mathcal{E}$ :

- Sécante, avec le cas particulier où les deux plans sont perpendiculaires
- Parallèles




**Figures exemples :**

# III Parallélisme dans l'espace

## A Parallélisme de deux droites

**Proposition 4**

- Si deux droites sont parallèles, toute parallèle à l'une est parallèle à l'autre.
- Si deux droites sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'une coupera l'autre.

## B Parallélisme d'un plan et une droite

**Proposition 5**

Si un plan $\mathscr{P}$ contient une droite $d$ parallèle à une droite $\Delta$, alors $\mathscr{P}$ et $\Delta$ sont parallèles.

.

**Proposition 6**

Si une droite $d$ et un plan $\mathscr{P}$ sont parallèles, alors tout plan contenant $d$ et sécant à $\mathscr{P}$, coupe $\mathscr{P}$ selon une droite parallèle à $d$

.

**Proposition 7**

Si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$ sont deux plans sécants suivants la droite $\Delta$.
Si une droite $d$ de $\mathscr{P}$ est parallèle à une droite $d'$ de $\mathscr{R}$ alors la droite $\Delta$ est parallèle à $d$ et $d'$.

.

## C Parallélisme de plans

**Proposition 8**

Si deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$ sont parallèles alors :

- Tout plan parallèle à l'un est parallèle à l'autre
- Tout plan qui coupe l'un, coupe l'un coupe l'autre par une droite qui lui est parallèle

.

# IV Orthogonalité dans l'espace

## A Orthogonalité de deux droites

**Définition 1**

On dira que deux droites sont perpendiculaires si leur direction (voir chapitre sur les vecteurs) sont orthogonales.
Deux droites sont perpendiculaires si elles sont orthogonales et sécantes.

## B Orthogonalité d'une droite et d'un plan

**Définition 2**

Une droite est perpendiculaire (ou orthogonale) à un plan, si elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

**Proposition 9**

Une droite est perpendiculaire (ou orthogonale) à un plan, si elle est orthogonale à deux sécantes ce plan.

.

## C Propriétés

**Proposition 10**

- Si deux droites sont parallèles, alors tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.
- Deux droites orthogonales à un même plan plan sont parallèles.

.

**Proposition 11**

- Si deux plans sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.
- Deux plans orthogonaux à une même droite sont parallèles.

.

## D Projeté orthogonal

**Définition-Proposition 12**

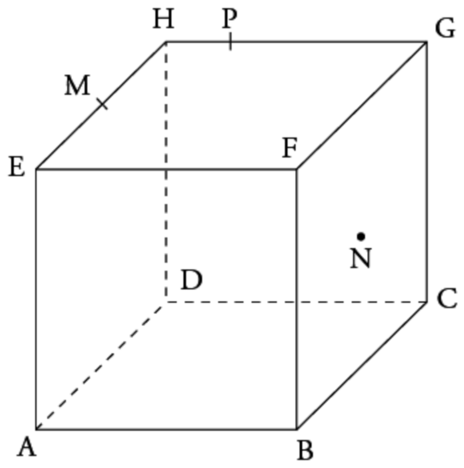
Soit un point $M$ et un plan $\mathscr{P}$ de l'espace. Le projeté orthogonal de $M$ sur $\mathscr{P}$ est l'unique point d'intersection de la perpendiculaire à $\mathscr{P}$ passant par $M$ avec le plan $\mathscr{P}$.

**Définition-Proposition 13**

Soit un point $M$ et une droite $d$ de l'espace. Le projeté orthogonal de $M$ sur $d$ est l'unique point d'intersection du plan perpendiculaire à $d$ passant par $M$ avec la droite $d$.

## E Exercices

**Exercice 1.** On considère un cube ABCDEFGH donné ci-dessous.
On note $M$ le milieu du segment $[EH]$, $N$ celui de $[FC]$ et $P$ le point tel que $\overrightarrow{HP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HG}$.




**Partie A**

1. Justifier que les droites $(MP)$ et $(FG)$ sont sécantes en un point $L$. Construire le point $L$.
2. On admet que les droites $(LN)$ et $(CG)$ sont sécantes et on note T leur point d'intersection.
   On admet que les droites $(LN)$ et $(BF)$ sont sécantes et on note $Q$ leur point d'intersection.
   (a) Construire les points $T$ et $Q$ en laissant apparents les traits de construction.
   (b) Construire l'intersection des plans $(MNP)$ et $(ABF)$
3. En déduire une construction de la section du cube par le plan $(MNP)$.

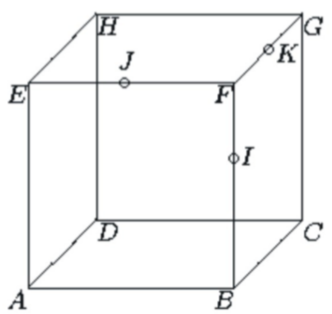
**Partie B**

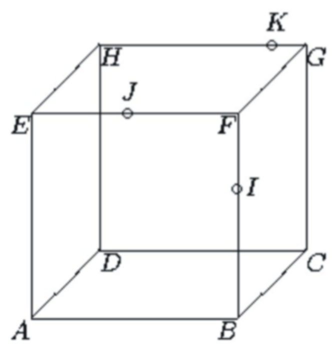
L'espace est rapporté au repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$

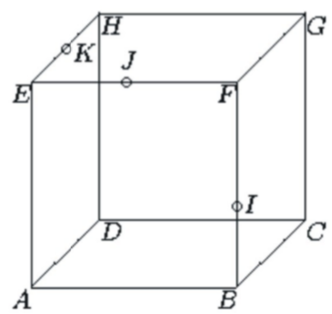
1. Donner les coordonnées des points $M$, $N$ et $P$ dans ce repère.
2. Déterminer les coordonnées du point $L$.
3. Déterminer les coordonnées du point $T$. Le triangle $TPN$ est-il rectangle en $T$ ?

Corrigé

**Exercice 2.** Soit $ABCDEFGH$ un cube. Dans les trois cas suivants ($K$ appartient au segment $[FG]$, $K$ appartient au segment $[GH]$, $K$ appartient au segment $[HE]$), tracer les sections du cube par le plan $(IJK)$ ($I$ appartient au segment $[BF]$ et $J$ appartient au segment $[EF]$) en perspective cavalière. **Corrigé**




**Exercice 3.** Exercice interactif

**Exercice 4.** Liste d'exercices corrigés.

# V Vecteurs de l'espace

## A Définitions

**Définition 3**

À tout couple $(A;B)$ de points de l'espace, on associe le vecteur $\mathbb{V}AB$ défini de la façon suivante :

— Si $A \neq B$, le vecteur $\mathbb{V}AB$ a :
- pour **direction** celle de la droite $(AB)$ ;
- pour **sens** celui de A vers B ;
- pour **norme** la longueur $AB$. On note $||\mathbb{V}AB|| = AB$.

— Si $A = B$, le vecteur $\mathbb{V}AA$ est le vecteur nul, on le note $\mathbb{V}0$.

**Définition 4** (Égalité de deux vecteurs)

— Dire que deux vecteurs $\mathbb{V}AB$ et $\mathbb{V}CD$ sont **égaux** signifie que $ABDC$ est un parallélogramme, éventuellement aplati.
Dans ce cas, $\mathbb{V}AB$ et $\mathbb{V}CD$ sont les **représentants** d'un même vecteur $\mathbb{V}u$. On note $\mathbb{V}u = \mathbb{V}AB = \mathbb{V}CD$.

— Pour tout point $E$ de l'espace et tout vecteur $\mathbb{V}v$, il existe un unique point $F$ tel que $\mathbb{V}EF = \mathbb{V}v$.

**Remarque** : Deux vecteurs non nuls sont **égaux** lorsqu'ils ont même direction, même sens et même norme.

## B Opérations sur les vecteurs

Les opérations sur les vecteurs du plan s'étendent aux vecteurs de l'espace.

**Rappels**

**Relation de Chasles**
Pour tous points $A, B$ et $C$ de l'espace on a : $\mathbb{V}AB + \mathbb{V}BC = \mathbb{V}AC$.

**Règle du parallélogramme**
Soit $A$, $B$ et $C$ trois points distincts. La somme $\mathbb{V}AB + \mathbb{V}AC$ est le vecteur $\mathbb{V}AD$, où $D$ est le point tel que $ABDC$ est un parallélogramme.

**Exemple 1.** ABCD est un tétraèdre de l'espace. $I$ est le milieu de l'arête $[CD]$. $G$ est le centre de gravité du triangle $BCD$.
Montrons que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$

***Exercices 2 à 7 page 295 puis 25 à 32 page 303***

## C Colinéarité, parallélisme et alignement

**Définition 5**

Dire que deux vecteurs $\mathbb{V}AB$ et $\mathbb{V}CD$ sont **colinéaires** signifie que les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles.

Par convention, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

**Proposition 14**

Deux vecteurs non nuls $\mathbb{V}u$ et $\mathbb{V}v$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un nombre $k$ tel que $\mathbb{V}v = k\mathbb{V}u$.

**Proposition 15**

Trois points $A$, $B$ et $C$ de l'espace sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\mathbb{V}AB$ et $\mathbb{V}AC$ sont colinéaires.
Les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\mathbb{V}AB$ et $\mathbb{V}CD$ sont colinéaires.

**Théorème 16**

$A$ et $B$ sont deux points distincts de l'espace.
La droite $(AB)$ est l'ensemble des points $M$ tels que $\mathbb{V}AM$ et $\mathbb{V}AB$ sont colinéaires, c'est-à-dire l'ensemble des points $M$ tels que $\mathbb{V}AM = t\mathbb{V}AB$, avec $t$ réel.

**Vidéo 1**

Démontrer l'alignement par décomposition de vecteurs

***Exercices 10 et 11 page 297.***

# VI Vecteurs coplanaires

**Théorème 17**

Soit $A$, $B$ et $C$ trois points non alignés de l'espace et soit $\mathscr{P}$ le plan $(ABC)$.
Un point $M$ appartient au plan $\mathscr{P}$ si, et seulement si, il existe des réels $x$ et $y$ tels que $\mathbb{V}AM = x\mathbb{V}AB + y\mathbb{V}AC$.

De façon générale, un plan est défini par un point $A$ et deux vecteurs non colinéaires $\mathbb{V}u$ et $\mathbb{V}v$. On parle alors du plan $(A; \mathbb{V}u; \mathbb{V}v)$. On dit que $\mathbb{V}u$ et $\mathbb{V}v$ sont des **vecteurs directeurs** de ce plan.

**Proposition 18**

Deux plans qui ont deux vecteurs directeurs en commun sont parallèles.

**Définition 6**

Dire que les vecteurs $\mathbb{V}u$, $\mathbb{V}v$ et $\mathbb{V}w$ sont **coplanaires** signifie que pour un point $O$ quelconque de l'espace, les points $O$, $A$, $B$ et $C$ définis par $\mathbb{V}OA = \mathbb{V}u$, $\mathbb{V}OB = \mathbb{V}v$ et $\mathbb{V}OC = \mathbb{V}w$ sont dans un même plan.

**Proposition 19**

$\mathbb{V}u$, $\mathbb{V}v$ et $\mathbb{V}w$ sont des vecteurs de l'espace tels que $\mathbb{V}u$ et $\mathbb{V}v$ ne sont pas colinéaires.
$\mathbb{V}u$, $\mathbb{V}v$ et $\mathbb{V}w$ sont **coplanaires** si, et seulement si, il existe des nombres réels $a$ et $b$ tels que $\mathbb{V}w = a\mathbb{V}u + b\mathbb{V}v$.

**Conséquences**

1. Dire que 4 points $A$, $B$, $C$ et $D$ sont **coplanaires** équivaut à dire que les vecteurs $\mathbb{V}AB$, $\mathbb{V}AC$ et $\mathbb{V}AD$ sont coplanaires.
2. Dire que les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont **coplanaires** équivaut à dire que les vecteurs $\mathbb{V}AB$, $\mathbb{V}AC$ et $\mathbb{V}AD$ sont coplanaires.
3. Dire que deux plans sont parallèles équivaut à dire que deux vecteurs non colinéaires de l'un et deux vecteurs non colinéaires de l'autre sont coplanaires.

***Exercices 13 à 15 page 299 puis 33 à 50 page 303 à 305***

# VII Repérage dans l'espace

**Définition 7**

Un **repère de l'espace**, noté $(O; \mathbb{V}i; \mathbb{V}j; \mathbb{V}k)$ est formé d'un point $O$ et d'un triplet $(\mathbb{V}i; \mathbb{V}j; \mathbb{V}k)$ de vecteurs non coplanaires.

**Proposition 20**

$(O; \mathbb{V}i; \mathbb{V}j; \mathbb{V}k)$ est un repère de l'espace.
Pour tout point $M$ de l'espace, il existe un unique triplet $(x; y; z)$ de nombres réels tels que $\mathbb{V}OM = x\mathbb{V}i + y\mathbb{V}j + z\mathbb{V}k$.

**Vocabulaire** : $(x; y; z)$ sont les coordonnées du point $M$ ou du vecteur $\mathbb{V}OM$ dans le repère $(O; \mathbb{V}i; \mathbb{V}j; \mathbb{V}k)$.
$x$ est l'abscisse, $y$ est l'ordonnée et $z$ est la cote du point $M$ dans ce repère.

**Théorème 21**

$\mathbb{V}u$, $\mathbb{V}v$ et $\mathbb{V}w$ sont trois vecteurs **non coplanaires**.
Pour tout vecteur $\mathbb{V}V$, il existe un unique triplet de nombres $(x; y; z)$ tels que $\mathbb{V}V = x\mathbb{V}u + y\mathbb{V}v + z\mathbb{V}w$.
$(x; y; z)$ sont les **coordonnées de** $\mathbb{V}V$ dans la base $(\mathbb{V}u; \mathbb{V}v; \mathbb{V}w)$.

**Calculs sur les coordonnées**

— Si $\mathbb{V}u$ et $\mathbb{V}v$ ont pour coordonnées respectives $(x; y; z)$ et $(x'; y'; z')$ dans le repère $(O; \mathbb{V}i; \mathbb{V}j; \mathbb{V}k)$ alors :

- le vecteur $\mathbb{V}u + \mathbb{V}v$ a pour coordonnées ...........................

- pour tout réel $\lambda$, le vecteur $\mathbb{V}\lambda u$ a pour coordonnées ...........................

— Si $A$ et $B$ ont pour coordonnées $(x_A; y_A; z_A)$ et $(x_B; y_B; z_B)$ alors :

- le vecteur $\mathbb{V}AB$ a pour coordonnées ...........................

- le milieu $I$ du segment $[AB]$ a pour coordonnées ....................................

— Si le repère $(O; \mathbb{V}i; \mathbb{V}j; \mathbb{V}k)$ est orthonormé alors : $||\mathbb{V}u|| =$ ........................... et

$AB = ||\mathbb{V}AB|| =$ ..........................................

***Exercices 51 à 68 page 305 à 306***