Chapitre 2 : Limite de fonctions.

Notation : On considère une fonction f définie sur un .

I Approche Globale.

A Histoire.

Depuis l'antiquité, la notion de limite joue un rôle majeur en mathématiques. Mais ce n'est que récemment, au XIXe siècle, que les mathématiciens parvinrent à en donner une définition précise et rigoureuse. *Sources.*

On peut faire commencer l'histoire du concept de limite avec Zénon d'Élée qui fut un disciple de Parménide. Il est surtout connu pour ses paradoxes qui prétendent démontrer "l'impossibilité du mouvement". Anecdote notamment de la balle qui rebondie de moitié un temps fini sans jamais atteindre le sol. ($\lim n \to = \infty \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et de la limite de la somme) *Zénon d'Élée 450 A-J*

L'analyse fit d'énormes progrès au cours des XVIIe et XVIIIe siècles.

Chez Leibniz , dans le premier article qu'il publia, en février 1682. de donne le nombre π comme la somme suivante : *Leibniz 1646-1716*

$$\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots.$$

A mesure toutefois que s'étendaient les recherches et les découvertes en Analyse au cours de XIXe siècle, la nécessité de définir clairement les concepts et les termes mis en œuvre se fit sentir.

Cette mise en ordre commence avec Louis-Augustin Cauchy , qui fait de la limite une des notions centrales de l'analyse. Il en donne la définition suivante dans son Cours d 'Analyse de l'école Polytechnique : *Cauchy 1789-1857*

"Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur finie, de manière à en différer aussi peu qu'on voudra, cette dernière est appelée limite de toutes les autres."

Cependant 'est à 'allemand Karl Weierstrass que l'on doit le langage très précis, plus mathématique, qui seul permet de raisonner correctement. La présentation de la limite d'une suite est alors proche de celle utilisée aujourd'hui si (u_n) est une suite qui tend vers l : *Weierstrass 1815-1897*

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^{+*}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Rightarrow |u_n - l| \leqslant \epsilon$$

B Attendus.

- Utiliser la définition des limites. *(1-2 p 93 - 1 p 95)*
- Appliquer les règles opératoire. *(1-2 page 97)*
- Savoir utiliser la méthode par factorisation du terme prépondérant. *(1-2 page 97)*
- Étudier une limite par comparaison ou encadrement. *(1-2 page 99)*
- Savoir utiliser les limites à connaitre. *33 page 101)*
- Savoir appliquer les propriétés des croissances comparées. *(34 page 101)*
- Savoir utiliser les taux d'accroissement pour déterminer une limite. . *(Démonstration 1 page 100)*
- Savoir déterminer les asymptotes horizontales et verticales, notamment à partir du tableau de variation.
- Savoir que si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative de $\mathscr{C}_f$.
- Connaitre la définition de la continuité en un point et sur un segment.
- Problème de raccordement pour les fonctions continues. *(14 page 123)*
- Savoir utiliser les théorèmes usuelles pour démontrer qu'une fonction est continues sur un intervalle.
- Savoir utiliser le théorème des valeurs intermédiaires, dans le cas une fonction simplement continue ou continue et monotone. *(17-18 page 125)*
- Utiliser le tableau de variation et le TVI pour déterminer un encadrement et le nombres de solution d'une équation du type $f(x) = k$ $(k \in \mathbb{R})$. *(24 page 127)*

C Démonstrations.

— Théorème de comparaison. *page 98*

— $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$. *page 100*

— Croissance comparée. *page 100*

— Unicité de la solution de $f(x) = k$ si f strictement monotone et continue sur $]a, b[$ et $k \in]f(a), f(b)[$. *page 126*

II Limite en l'infini.

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]a; +\infty[$. On dira que f admet une limite en $+\infty$, si elle vérifie :

- Pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe une valeur $\alpha \geqslant a$ tel que :

$$\forall x \in I, x \geqslant \alpha \Rightarrow f(x) \geqslant A$$

Et alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

- Une définition similaire pour $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
- Il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha \geqslant a$ tel que :

$$\forall x \in I, x \geqslant \alpha \Rightarrow f(x) \in]l - \epsilon; l + \epsilon[$$

Et alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$

Important : *On a une définition similaire pour* $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

Définition-Proposition 1

Avec les notions précédentes, lorsque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$. On dira que la droite d'équation $y = l$ est une asymptote horizontale en $+\infty$ à la courbe représentative de f.

Si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$, *alors* $y = l$ *asymptote en* $-\infty$.

Vidéo 1. Exemple d'asymptote horizontale.

Exemple 1. Déterminons la limite de la fonction $f : x \mapsto 2 + \frac{1}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ en $+\infty$.
Soit ε un réel non nul.
On note alors $A = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Ainsi pour tout $x \geqslant A$, $|f(x) - 2| = \frac{1}{x^2} \leqslant \varepsilon$.
Donc la fonction f tend donc vers 2 en $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$

La droite $y = 2$ est donc une asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$.

Exemple 2. Les fonctions de termes générales $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^p}$ avec p un réel positif convergent toutes vers 0.

III Opérations sur les limites

Dans cette partie, on considère f et g deux fonctions et l et l' deux réels. Et soit $a \in \bar{\mathbb{R}}$.

A Limite d'une somme.

$\lim_{x\to a} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x\to a} (f+g)(x)$						

Vidéo 2. Supprimer une indéterminé 1.

B Limite d'un produit.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	$l>0$	$l<0$	$l>0$	$l<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	∞
$\lim\limits_{x\to a} (f\times g)(x)$									

Vidéo 3. Supprimer une indéterminé 2.

C Limite d'un quotient.

Dans cette partie, on suppose que g ne s'annule pas sur un voisinage de a. Par ailleurs on choisie la notion $\bar{l}<0$ pour noté $l<0$ et $-\infty$.

Vidéo 4. Supprimer une indéterminé 3.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\bar{l}>0$	$\bar{l}<0$	$\bar{l}>0$	$\bar{l}<0$	0	∞
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\neq 0$	$\pm\infty$	$l'>0$	$l'<0$	$l'>0$	$l'<0$	0^+	0^+	0^-	0^-	0	∞
$\lim\limits_{x\to a} \frac{f}{g}(x)$												

D Cas d'une FI avec radicaux.

On retrouve les méthodes soit de factorisation par le terme prépondérant soit avec la *quantité conjuguai.*

Vidéo 5. Exem 1.
Vidéo 6. Exem 2.

Exemple 3. Faire un exemple avec un polynôme et une fraction rationnelle.

Ex 10-30 page 95

IV Limite en un point et continuité.

A Définition Limite infinie en un point.

Définition 2

limite ∞ en un point Soit $a\in\mathbb{R}$.
Soit f une fonction définie sur un intervalle à *gauche* ou à *droite*. On notera D l'ensembeld e défintion de f. On dira que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$, si :

$$\forall A\in\mathbb{R}, \exists\alpha\in\mathbb{R}^{*+}\forall x\in D\cap]a-\alpha;a+\alpha[,\quad f(x)>A$$

Définition similaire si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$.

Remarque 1. Si l'on définie les fonctions :

$$f\ :\ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x}\end{array} \quad ;\ g\ :\ \begin{array}{ccc}]-\infty;0[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x}\end{array} \quad ;\ h\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x}\end{array}$$

• La fonction f admet pour limite $+\infty$ en 0.
• La fonction g admet pour limite $-\infty$ en 0.
• La fonction h n'admet pas en 0. En effet, l'on pourra parler de limite à droite et de limite à gauche. Mais ces deux limites étant différentes, la fonction h n'admet pas de limite en 0.

Définition-Proposition 2

Avec les hypothèse de la définition précédente lorsque $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$. On dira que la droite d'équation $x=a$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f.

Idem si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$.
Vidéo 7. Exemple d'asymptote verticale.

Exemple 4. Déterminons la limite de la fonction $f: x\mapsto 2+\frac{1}{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ en 0.
Soit A un réel positif non nul.
On note alors $\alpha=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Ainsi pour tout $x\geqslant]-\alpha,\alpha[\setminus\{0\}$, $|f(x)|\geqslant A$.

Donc la fonction f tend donc vers $+\infty$ en 0.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$$

La droite $x = 0$ est donc une asymptote verticale à la courbe représentative de f (en 0)

Ex 1-9 page 94

B Limite finie en un point et continuité

Définition 3

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit a une valeur à "l'intérieur" de I et l un réel. On dira que $\lim_{x\to a} f(x) = l$, si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \in \mathbb{R}^{*+} \forall x \in I, \quad |x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Si f est définie en a alors $f(a) = l$ et on dira alors que f est **continue** en a.

Dit autrement, aussi proche que l'on souhaite être de l par f il existera un intervalle contenant strictement a qui nous permettra de l'être.

Exemple 5. Considérons la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} & si\ x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Étude de la continuité en 0.

Exemple 6. Considérons la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{sinx}{x} & si\ x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Étude de la continuité en 0.

Exemple 7. Considérons la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x+3-2}} & si\ x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

Étude de la continuité en 0.

C Continuité sur un segment et TVI.

Définition 4

Soit une fonction f définie sur un intervalle I. On dira que f est continue sur I si elle est continue en tous points a de I.

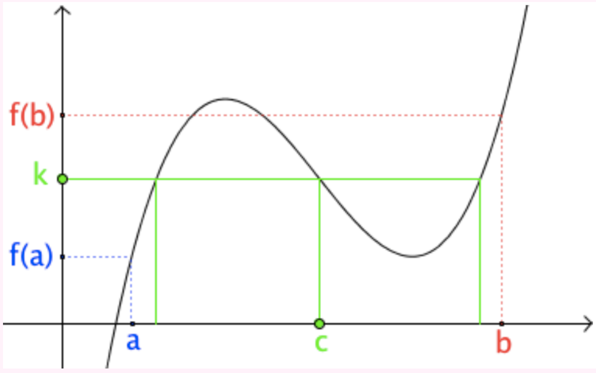
Vidéo 8. .
Exemple de continuité.
Vidéo 9. .
Étude de la continuité.

Théorème 3 (Théorème dit usuel)

Toutes les fonctions de référence sont continues sur leur ensemble de définition, ainsi que les polynômes et les factions rationnelles.

Théorème 4 (Théorème des valeurs intermédiaires)

On considère la fonction f définie et continue sur un intervalle [a ; b]. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.



Vidéo 10. . TVI

Vidéo 11. . Approximation des solutions.

Vidéo 12. . Balayage TI

Vidéo 13. . Balayage Casio

Corolaire 5

Avec les hypothèses du théorème précédent, si la fonction est strictement monotone, la solution est unique.

Exemple 8. Déterminons le nombre de solution de l'équation $f(x) = 1$ avec :

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{x}x^2 + 1 \end{array}$$

V Composée de fonction.

Vidéo 14. Exem 2.

Proposition 6

Soient f définie de l'intervalle I dons l'intervalle J et g de l'intervalle J dans l'intervalle K. Soit a et b des éléments de $\bar{\mathbb{R}}$ à "l'intérieur" de I et respectivement de J pour b. Soit $l \in \bar{\mathbb{R}}$. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to b} g(x) = l$, alors :

$$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = l$$

Exemple 9. Déterminons la limiet en $+\infty$ de la fonction :

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R} \backslash \{-3\} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x + 3} \end{array}$$

Ex 31-42 page 98

VI Comparaison de fonction.

Vidéo 15. Exem 1.
Vidéo 16. Exem 2.

Proposition 7

Soient trois fonctions f, g et h définie sur un intervalle I et $\alpha \in \bar{\mathbb{R}}$ à "l'intérieur" de I. Soit $l \in \mathbb{R}$.

- Si $\forall x \in I, f(x) \leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = -\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = -\infty$.
- Si $\forall x \in I,\ g(x) \leqslant h(x)$ et $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = +\infty$, alors : $\lim\limits_{x\to\alpha} h(x) = +\infty$.
- Si $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ et $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} h(x) = l$, alors on peut affirmer que g admet une limite en α est cette limite vérifie :

$$\lim_{x\to\alpha} g(x) = l$$

.

"Théorème des gendarmes"

Exemple 10. Pour déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction :

$$\begin{array}{rcccc} f & : & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{\sin x}{x} \end{array}$$

Exemple 11. Pour déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction :

$$\begin{array}{rcccc} g & : & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \cos x + x^2 + 4 \end{array}$$

VII Outils de comparaison.

A Limite en en point.

Proposition 8

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$$

Rappel : Le taux d'accroissement en a : $\tau_a = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ d'une fonction f dérivable en a vérifie $\lim\limits_{x\to a} \tau_a = f'(a)$

Démonstration 1. On utilise le taux d'accroissement en 0 où fonction exponentielle est dérivable :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = \exp'(0) = \exp(0) = 1$$

Démonstration 2. On utilise le taux d'accroissement en 1 où fonction logarithme est dérivable :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{x-1} = \ln'(0) = \frac{1}{1} = 1$$

Indication : Ici il suffit de savoir que $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$

B Croissance comparée.

Proposition 9

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x e^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$

Démonstration 3. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2}$.
On obtient $f'(x) = \mathrm{e}^x - x$ et $f''(x) = \mathrm{e}^x - 1$. D'où :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f''(x)$	0 $\quad$ $+$
$f'(x)$	1 $\nearrow$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	1 $\nearrow$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f(x) \geqslant 0 \Rightarrow \mathrm{e}^x \geqslant \dfrac{x^2}{2} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} \geqslant \dfrac{x}{2}$
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$, par comparaison on obtient : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

Méthode similaire à celle utilisée pour démontrer $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$

Démonstration 4. Si l'on effectue le changement de variable $X = -x$ (donc $x = -X$), on obtient :

$$\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = \lim_{X\to+\infty} -X\mathrm{e}^{-X} = \lim_{X\to+\infty} \frac{-X}{\mathrm{e}^X} = \lim_{X\to+\infty} \frac{-1}{\frac{\mathrm{e}^X}{X}} = 0 \quad \text{puisque} \quad \lim_{X\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$$

Démonstration 5. On effectue le changement de variable $X = \ln(x)$ (donc $x = \mathrm{e}^X$ et en supposant que $x > 0$) :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{X\to+\infty} \frac{X}{\mathrm{e}^X} = 0$$

Démonstration 6. On pose le changement de variable $X = \dfrac{1}{x}$.

$$\lim_{x\to0^+} x\ln(x) = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{X} \ln\left(\frac{1}{X}\right) = \lim_{X\to+\infty} \frac{-\ln(X)}{X} = 0$$

Indication :il faut ici connaitre la formule : $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$ pour tout $a > 0$.

Corolaire 10

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que P ne soit pas constant, on obtient :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{P(x)}{\mathrm{e}^x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x)\mathrm{e}^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{P(x)} = 0$
- $\lim\limits_{x\to0^+} P(x)\ln(x) = 0$

Démonstration 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On montre tout d'abord que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$.
De la proposition précédente et le changement de variable $X = \dfrac{x}{n}$c'est-à-dire $x = nX$, on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}}{x} = \lim_{X\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^X}{nX} = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}}{x}\right)^n = +\infty$$

Ensuite, soit $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que P ne soit pas constant :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^k}{\mathrm{e}^x} = 0$$

Après un travail sur les puissances, on disposera d'outil plus efficace pour conclure

Démonstration 8. Avec les hypothèses de la démonstration précédente. On effectue le changement de variable $X = -x$ et l'on obtient :

$$\lim_{x\to-\infty} P(x)\mathrm{e}^x = \lim_{X\to+\infty} P(-X)\mathrm{e}^{-X} = \lim_{X\to+\infty} \frac{P(-X)}{\mathrm{e}^X} = 0$$

Démonstration 9. Avec les hypothèses de la démonstration précédente :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{P(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^{k-1}\right)} = 0$$

Puisque : $\lim_{x\to+\infty} x^{k-1} = \begin{cases} \infty & si \quad k \geqslant 2 \\ Cte & si \quad k \geqslant 1 \\ 0 & si \quad k \geqslant 0 \end{cases}$. Donc $\lim_{x\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k x^{k-1} = \begin{cases} \infty & si \quad n \geqslant 2 \\ Cte & si \quad n = 1 \end{cases}$.

Démonstration 10. $\lim_{x\to0^+} = cte$ et $\lim_{x\to0^+} \ln x = 0$
Donc $\lim_{x\to0^+} P(x)\ln(x) = 0$

Méthode 1

On pourra simplement indiquer que les polynômes sont négligeable devant l'exponentielle en l'infini et le logarithme est négligeable devant les polynômes en l'infini.

Exemple 12. Pour déterminer la limite au borne de son domaine de définition de la fonction :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{\mathrm{e}^x + 2}{x} \end{array}$$

Ex 43-49 page 97