

# Chapitre 1 : Limites de suites .

## I Approche Globale.

### A Un peu d'histoire.

On fait souvent remonter la récurrence à Euclide , l'exemple habituellement donné est la proposition 20 du livre IX des Éléments, où est prouvée l'existence d'une quantité arbitrairement grande de nombres premiers. Il y a l'esquisse d'une récurrence, mais elle n'est pas explicitée; en outre l'idée d'une infinité de nombres premiers est absente.

Vers l'an 1000, le persan Al-Karaji établit la formule du binôme de Newton (en fait il n'a pas les notations qui lui permettraient de l'énoncer dans le cas général, mais les méthodes fonctionnent pour un entier arbitraire). Il calcule également la somme des cubes des  $n$  premiers entiers naturels, al-Samaw'al poursuit ses travaux.

Nicolas Oresme , mathématicien français du *XIV* siècle a étudié les suites arithmétiques et géométriques ainsi que la somme des termes de certaines d'entre-elles. Oresme est le premier à utiliser le Français dans les textes mathématiques, il est aussi persuadé, bien avant Galilée, de la rotation de la Terre autour du Soleil. Il a inventé, avant Descartes, le premier système de coordonnées.

L'idée de fonction est plus récente, elle date des *XVII* et *XVIII* siècles.

Les mathématiciens ont alors montré qu'une suite est une fonction particulière.

Les fondements rigoureux de la théorie des suites sont posés au début du *XIX* siècle par le français Augustin Cauchy , l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps.

Euclide : 300 av. J.-C.

Al-Karaji (953-1029)

Newton : 1643 -1727

Oresme 1320-1382

Cauchy 1789-1857

## B Programme

En classe de première, l'étude des suites est abordée sous un angle essentiellement algébrique. En classe terminale, on commence l'étude de la convergence.

La notion de limite est présentée de manière intuitive, en s'appuyant notamment sur la vision géométrique et sur l'écriture décimale. On explicite ensuite les définitions mais la maîtrise complète du formalisme n'est pas un attendu.

Les objectifs sont plutôt d'installer une pratique solide des aspects opératoires (détermination de limites) et d'introduire la problématique des théorèmes d'existence, notamment la convergence d'une suite croissante majorée.

Lors de l'étude d'une suite, on distingue les aspects globaux des aspects asymptotiques. Les élèves doivent disposer d'un répertoire d'exemples suffisamment riche pour éviter les confusions entre propriétés.

Les suites interagissent avec les autres parties du programme. Outre leurs interventions en analyse, de nombreux problèmes de probabilités conduisent naturellement à étudier un modèle probabiliste dépendant d'un entier  $n$ .

### 1 Contenus

- La suite  $(u_n)$  tend vers  $+\infty$  si tout intervalle de la forme  $[A, +\infty[$  contient toutes les valeurs  $(u_n)$  à partir d'un certain rang. Cas des suites croissantes non majorées. Suite tendant vers  $-\infty$ .
- La suite  $(u_n)$  converge vers le nombre réel  $\ell$  si tout intervalle ouvert contenant  $\ell$  contient toutes les valeurs  $u_n$  à partir d'un certain rang.
- Limites et comparaison. Théorèmes des gendarmes.
- Opérations sur les limites.
- Comportement d'une suite géométrique  $q^n$  où  $q$  est un nombre réel.
- Théorème de convergence monotone : toute suite croissante majorée (ou décroissante minorée) converge.

### 2 Capacité attendus.

- Tous les attendus de première.
- Établir qu'une suite diverge vers  $+\infty$ .
- Établir qu'une suite converge.

(1 page 45)

(2 page 45)

- Raisonner par récurrence pour établir une propriété d'une suite.
- Étudier des phénomènes d'évolution modélisables par une suite.
- Utiliser un théorème de comparaison
- Utiliser le théorème des gendarmes.
- Savoir compléter intuitivement les tableaux sur les opérations et limites.
- Savoir appliquer les règles d'opération sur les suites.
- Savoir représenter une suite récurrente et en déduire les variations et limite à partir de cette représentation.
- Savoir programmer une suite récurrente sur la calculatrice et sous forme d'algorithme (avec Python par exemple).

(8 page 47)

(9 page 47)

(page 48)

(19-20 page 49)

V 1. Calculatrice

### 3 Démonstrations à connaître.

- Toute suite croissante non majorée tend vers  $+\infty$ .
- Limite de  $q^n$ , après démonstration par récurrence de l'inégalité de *Bernoulli*.
- Divergence vers  $+\infty$  d'une suite minorée par une suite divergeant vers  $+\infty$ .
- Limite en  $+\infty$  et en  $-\infty$  de la fonction exponentielle.

### 4 Exemples d'algorithme

- Recherche de seuils.
- Recherche de valeurs approchées de  $\pi$ ,  $e$ ,  $\sqrt{2}$ ,  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ,  $\ln(2)$ , ect...

### 5 Approfondissements

- Propriétés et utilisation des suites adjacentes.
- Exemples de suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
- Exemples d'application de la méthode de Newton.
- Étude de la convergence de la méthode de Héron.

## II Comportement d'une suite à l'infini

### A Convergence

#### Définition 1

Soit  $l$  un réel et  $(u_n)$  une suite.

On dit que la suite  $(u_n)$  converge vers  $l$  si pour tout intervalle **ouvert** contenant  $l$  il existe un rang à partir duquel tous les  $u_n$  sont contenus dans cet intervalle.

On dit alors que  $l$  est la **limite** de la suite  $(u_n)$  et on note  $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

Si une suite ne converge pas, on dit que la suite est **divergente**.

*Remarque 1.* Il y a deux types de divergence : les suites ayant une limite infinie ou celles qui n'ont pas de limite.

**Exemple 1.** Les suites de termes générales  $\frac{1}{n}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ,  $\frac{1}{n^2}$  et  $\frac{1}{n^p}$  avec  $p$  un réel positif convergent toutes vers 0.

*Démonstration pour  $\frac{1}{n}$  :* Soit  $(u_n)$  la suite de terme général  $\frac{1}{n}$  et  $\alpha$  un réel non nul.

On note alors  $n_0$  le plus petit entier tel que  $n_0 > \frac{1}{\alpha}$ . Ainsi pour tout  $n \geq n_0$ ,  $u_n \in ]0 - \alpha; 0 + \alpha[$ .  $\square$

#### Proposition 1

Lorsqu'une suite admet une limite finie alors cette limite est unique.

*Démonstration 1.* Raisonnement par l'absurde.

On suppose l'existence d'une suite  $(u_n)$  qui tendrait vers deux limites distinctes  $l$  et  $l'$  (avec  $l < l'$ ).

Alors, on choisit  $\epsilon = \frac{l' - l}{3}$  et  $I = ]l - \epsilon; l + \epsilon[$  et  $I' = ]l' - \epsilon; l' + \epsilon[$ .

Du fait de la définition de limite :

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 \Rightarrow u_n \in I \quad \text{et} \quad \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2 \Rightarrow u_n \in I'$$

Si l'on note  $n_0 = \text{Max}(n_1, n_2)$  alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n \in I \cap I'$$

Or  $I \cap I' = \emptyset$ , d'où la contradiction.

## B Limite infinie.

### Définition 2 (Limite infinie)

Soit  $(u_n)$  une suite.

On dit que  $(u_n)$  admet pour limite  $+\infty$  si pour tout  $A$  réel alors il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont contenus dans l'intervalle  $]A; +\infty[$ .

On écrit alors que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

*Remarque 2.* On peut écrire une définition similaire pour une limite de  $-\infty$ .

**Exemple 2.** Les suites de termes générales  $n, n^2, n^2 - 3n + 1$ .

*Démonstration 2* (Démonstration pour  $n^2$  :). Soit  $(u_n)$  la suite de terme général  $n$  et  $A$  un réel non nul.

On note alors  $n_0$  le plus petit entier tel que  $n_0 > \sqrt{A}$ . Ainsi pour tout  $n \geq n_0, u_n > A$ .

## III Opérations sur les limites

Dans cette partie, on considère  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites et  $l$  et  $l'$  deux réels.

### A Limite d'une somme.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$l$	$l$	$l$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + v_n$						

**V** 2. Opération sur les limites 1

### B Limite d'un produit.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$l$	$l > 0$	$l < 0$	$l > 0$	$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$0$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$l'$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times v_n$									

### C Limite d'un quotient.

Dans cette partie, on suppose que  $v_n$  ne s'annule pas. Par ailleurs on choisie la notion  $\bar{l} < 0$  pour noté  $l < 0$  et  $-\infty$ .

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$l$	$l$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\bar{l} > 0$	$\bar{l} < 0$	$\bar{l} > 0$	$\bar{l} < 0$	$0$	$\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	$0^+$	$0^+$	$0^-$	$0^-$	$0$	$\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n}$												

## D Indéterminations.

On constate plusieurs cas d'indétermination dans les tableaux précédents.

**Exemple 3.** Les suites dont les termes généraux sont :

$$\begin{aligned} \bullet u_n &= n^2 - 3n & \bullet v_n &= \frac{5n^2 + 3}{2n^2 - 3n + 1} & \bullet w_n &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \\ & & & & \bullet t_n &= n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

V 3. exemple 1

V 4. exemple 2

V 5. exemple3

V 6. exemple 4

## IV Cas de convergence

### A Comparaison de suites.

#### Proposition 2 (Théorème des gendarmes)

Soient trois suites  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$ . Soit  $l \in \mathbb{R}$ .

- Si  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq v_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ , alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .
- Si  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n \leq w_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ , alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$ .
- Si  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq v_n \leq w_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$ , alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$ .

*Démonstration 3.* Si  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq v_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ . Soit  $A \in \mathbb{R}$ , alors :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow v_n \leq A$$

Or  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq v_n$ , donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq A$$

Donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

*Démonstration 4.* Démonstration similaire.

*Démonstration 5.* Si  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \leq v_n \leq w_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$ ,

Soit  $\epsilon > 0$ ,

Du fait de la définition de limite :

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 \Rightarrow u_n \in ]l - \epsilon, l + \epsilon[ \quad \text{et} \quad \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2 \Rightarrow w_n \in ]l - \epsilon, l + \epsilon[$$

Si l'on note  $n_0 = \text{Max}(n_1, n_2)$  alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow l - \epsilon \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq l + \epsilon$$

Donc :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$ .

### B Théorèmes de convergence.

*Remarque 3.*  
Attention!! Le majorant M doit être indépendant de n.  
Idem pour m.

**Définition 3**

Soit  $(u_n)$  une suite réelle.

- La suite  $(u_n)$  est dite majorée si :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$$

- La suite  $(u_n)$  est dite minorée si :

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$$

- La suite  $(u_n)$  est dite bornée si :

$$\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$$

**Proposition 3**

- Toute suite croissante majorée est convergente.
- Toute suite décroissante minorée est convergente.

*Remarque 4.* Si une suite est majorée par  $M$  et croissante, alors elle est convergente et sa limite est un majorant et même le plus petit des majorants.

**C Suites récurrentes.**

Soit  $f$  une fonction réelle et  $(u_n)$  la suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Comme vu en première, nous pouvons représenter les premiers termes de la suite  $(u_n)$  en utilisant les représentations de la première bissectrice et de la fonction  $f$ .

Dés lors nous pouvons effectuer un certain nombre de conjectures :

- Sens de variation.
- Limite
- Variation des termes pairs ou impairs.
- ....

**V** 7. Méthode "à la main".

**V** 8. Avec la Ti

**V** 9. Avec la Casio

**V** 10. Représentation d'une suite récurrente

## V Rappels sur les suites arithmétiques et géométriques.

	Suite arithmétique	Suite géométrique												
Formule de récurrence.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>u_{n+1} = u_n + r</math> (où <math>r</math> est la raison)</li> <li>Si <math>u_{n+1} - u_n = r</math> alors <math>(u_n)</math> est arithmétique de raison <math>r</math>.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>v_{n+1} = q \times v_n</math> (où <math>q</math> est la raison)</li> <li>Si <math>\frac{v_{n+1}}{v_n} = q</math> alors <math>(v_n)</math> est géométrique de raison <math>q</math>.</li> </ul>												
Variations.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Si <math>r &gt; 0</math> la suite <math>(u_n)</math> est croissante.</li> <li>• Si <math>r &lt; 0</math> la suite <math>(u_n)</math> est décroissante.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Si <math>0 &lt; q &lt; 1</math> alors <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0</math>.</li> <li>• Si <math>q = 1</math> alors <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1</math>.</li> <li>• Si <math>1 &lt; q</math> alors <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty</math>.</li> </ul>												
Limite.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Si <math>r &gt; 0</math> alors <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty</math>.</li> <li>• Si <math>r &lt; 0</math> alors <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty</math>.</li> </ul>													
		<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th><math>1^{ier}</math> terme <math>&gt; 0</math></th> <th><math>1^{ier}</math> terme <math>&lt; 0</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Si <math>0 &lt; q &lt; 1</math></td> <td><math>u_n \searrow 0</math></td> <td><math>u_n \nearrow 0</math></td> </tr> <tr> <td>Si <math>q = 1</math></td> <td><math>u_n</math> constante</td> <td><math>u_n</math> constante</td> </tr> <tr> <td>Si <math>1 &lt; q</math></td> <td><math>u_n \nearrow +\infty</math></td> <td><math>u_n \searrow -\infty</math></td> </tr> </tbody> </table>		$1^{ier}$ terme $> 0$	$1^{ier}$ terme $< 0$	Si $0 < q < 1$	$u_n \searrow 0$	$u_n \nearrow 0$	Si $q = 1$	$u_n$ constante	$u_n$ constante	Si $1 < q$	$u_n \nearrow +\infty$	$u_n \searrow -\infty$
			$1^{ier}$ terme $> 0$	$1^{ier}$ terme $< 0$										
		Si $0 < q < 1$	$u_n \searrow 0$	$u_n \nearrow 0$										
Si $q = 1$	$u_n$ constante	$u_n$ constante												
Si $1 < q$	$u_n \nearrow +\infty$	$u_n \searrow -\infty$												
Expression en fonction de $n$ .	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>u_n = nR + u_0</math>.</li> <li>• <math>u_n = (n - k)r + u_k</math>.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>v_n = q^n v_0</math>.</li> <li>• <math>v_n = q^{n-k} v_k</math>.</li> </ul>												
Somme de termes.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}</math></li> <li>• <math>\frac{1^{ier} \text{terme} + \text{der terme}}{2}</math> nb termes</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}</math></li> <li>• <math>1^{ier} \text{terme} \times \frac{q^{\text{nb termes}} - 1}{q - 1} = 1^{ier} \text{ter} \times \frac{1 - q^{\text{nb ter}}}{1 - q}</math></li> </ul>												