Chapitre 4 : Nombres complexes.

I Histoire.

D'un point de vue historique, les nombres complexes sont issus de la recherche de solutions à des équations du genre : $x^2 = \breve{}1$ intervenant dans la résolution des équations du troisième degré.

- Cardan vers le milieu du XVIe siècle, Jérôme Cardan et ses contemporains expérimentèrent des solutions d'équations faisant intervenir des racines carrées de nombres négatifs. Pour résoudre l'équation :
$$x(10-x) = 40 \quad \text{c'est-à-dire} \quad x^2 - 10x + 40 = 0$$
Cardan suggéra d'exprimer le nombre réel 40 sous la forme suivante :
$$(15+\sqrt{-15})(15+\sqrt{-15}) = 40$$
Cardan imagine que le produit des racines est négatif, d'où le signe + 15. Aujourd'hui (depuis Euler en 1777), on pourrait écrire :
$$\sqrt{-15} = i\sqrt{15} \Rightarrow -15 = \left(i\sqrt{15}\right)^2 = -15$$

Cardan (1501-1576)

- Bombelli imagine une technique de calcul avec les racines de nombres négatifs. Il se trouve confrontée à l'énigme suivante :
$$4 = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

Bombelli (1526-1572)

- Leibniz , en 1702, fera part de sa découverte à Christian Huygens et à Pierre Varignon :
$$6 = \left(\sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}}\right)^2$$
Jusqu'à cette époque, on cherchait à résoudre les équations du troisième degré. Ce n'est que plus tard que cette technique de calcul avec les racines négatives servira à résoudre les équations du second degré dont le déterminant est négatif (à quelques exceptions près, comme celle de Cardan indiquées ci-dessus).

Leibniz 1646-1716

Christian Huygens 1629-1695

Pierre Varignon 1654-1722

- Euler , quant à lui, introduisit en 1777, le symbole moderne i pour .
Il établit la célèbre relation : $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Euler 1707-1783

II Nombres complexes : Aspect algébrique

Notation : Considérons le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

A Premières définitions

On a vu, notamment en étudiant les équations polynomiales de degré 2 que l'on est parfois amenés à considérer des équations de la forme $x^2 = -a$ où $a > 0$. Ce type d'équations n'admet pas de solutions réelles, toutefois, afin de servir d'intermédiaires pour résoudre des problèmes complexes, « imaginer »des solutions. C'est cette idée qui a guidé Cardan pour définir ce que l'on appelle maintenant les nombres complexes.

Définition 1

Soit i un élément non-réel tel que $i^2 = -1$. On définit l'ensemble $\mathcal{C}$ des nombres complexes par
$$\mathbb{C} = \{a+ib\ ,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$$
On munit $\mathbb{C}$ d'une addition et d'une multiplication définies par, pour $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$,
$$(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d)$$
$$(a+ib)(c+id) = (ac-bd)+i(ad+bc)$$

***Vidéo* 1.** Calcul 1.
***Vidéo* 2.** Calcul 2

Rem 1. Inutile d'apprendre ces formules. En effet l'application de $i^2 = -1$ suffit pour les calculs (voir TD)

Définition-Proposition 1

Soit $z \in \mathbb{C}$, il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = a + ib$. On appelle a la partie réelle de z et b la partie imaginaire de z, ce que l'on note

$$a = \mathrm{Re}(z) \qquad b = \mathrm{Im}(z)$$

On appelle l'écriture $z = a + ib$ l'écriture sous forme algébrique du nombre complexe z.

On identifie $\mathbb{R}$ et $\{a + i0\ ,\ a \in \mathbb{R}\}$ de sorte que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. On écrira simplement a plutôt que $a + i0$.

Si $\mathrm{Re}(z) = 0$ on dit de z qu'il est imaginaire pur, on le notera alors ib plutôt que $0 + ib$. On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des imaginaires purs.

Rem 2. On a donc $a + ib = c + id$ si et seulement si $a = c$ et $b = d$.

Démonstration 1. Prouvons l'unicité de l'écriture algébrique d'un nombre complexe.
Soit $z = a + ib = c + id$. Si $b \neq d$ alors on obtient $i = \frac{a-c}{d-b} \in \mathbb{R}$, ce qui est absurde car i est par définition non réel.
On a donc $b = d$ et ainsi $a + ib = c + ib$. Ainsi $a - c = 0$ et, par suite $a = c$.

B Polynôme du second degré : généralisation.

On a vu dans la partie sur les nombres réels la méthode de résolution sur $\mathbb{R}$ des équations polynomiales de degré 2 a coefficients réels. On va généraliser ce résultat à la résolution sur $\mathbb{C}$ des équations polynomiales de degré 2 a coefficients réels.

Théorème 2

Résolution sur $\mathbb{R}$ des équations du second degré à coefficients réels Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$. On cherche les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ d'inconnue x.

Posons $\Delta = b^2 - 4ac$. On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

On appelle cette forme la forme canonique du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Plusieurs cas sont alors possibles

- Si $\Delta \geqslant 0$ l'équation $ax^2 + b + x + c = 0$ admet deux solutions réelles $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. On appelle ces deux réels les racines du polynôme $aX^2 + bX + c$, elles sont dites racines simples.
- Si en particulier $\Delta = 0$ alors les deux solutions sus-mentionnées sont confondues, on dit alors que $\frac{-b}{2a}$ est une racine double du polynôme $aX^2 + bX + c$.
- Si $\Delta < 0$ alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées $\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$. On appelle ce deux complexes les racines du polynôme $aX^2 + bX + c$, elles sont dites racines simples.

Notons x_1 et x_2 (éventuellement confondues) les deux solutions de l'équation $ax^2 + b + x + c$. On a alors

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$\frac{b}{a} = -(x_1 + x_2) \qquad \text{et} \qquad \frac{c}{a} = x_1 x_2$$

Rem 3. Ces notions étant connues dans $\mathbb{R}$ j'ai tout rappelé dans le même théorème.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{C}$, on a alors

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) \end{aligned}$$

On note $\Delta = b^2-4ac$. Si $\Delta \geqslant 0$ alors $\Delta = \sqrt{\Delta}^2$ et ainsi

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c=0 &\Leftrightarrow a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)=0 \\ &\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0 \qquad \text{car } a\neq 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2=0 \\ &\Leftrightarrow \left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0 \\ &\Leftrightarrow x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \end{aligned}$$

Si $\Delta < 0$ alors, $\Delta = i^2\sqrt{-\Delta}^2$ et ainsi

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c=0 &\Leftrightarrow a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)=0 \\ &\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0 \qquad \text{car } a\neq 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2=0 \\ &\Leftrightarrow \left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)+\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)-\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)=0 \\ &\Leftrightarrow x=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \end{aligned}$$

□

Rem 4. La démonstration est la même, seule l'expression de *Δ change.

C Propriétés de la partie réel et de la partie imaginaire.

Proposition 3

Soit $(z,z')\in\mathbb{C}^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. On a

- $\mathrm{Re}(z+\lambda z') = \mathrm{Re}(z)+\lambda\,\mathrm{Re}(z')$
- $\mathrm{Im}(z+\lambda z') = \mathrm{Im}(z)+\lambda\mathrm{Im}(z')$

Rem 5. Il est conseillé pour s'entrainer de faire ces démonstrations simples.

Démonstration 2. Ces propriétés découlent simplement des règles de calcul sur $\mathbb{C}$.
Exemple : Soit $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$ dans $\mathbb{C}$.

$$\mathrm{Re}(z+\lambda z') = \mathrm{Re}(a+ib+\lambda(a'+ib')) = \mathrm{Re}\left((a+\lambda a')+i(b+\lambda b')\right) = a+\lambda a' = \mathrm{Re}(z)+\lambda\,\mathrm{Re}(z')$$

Remarque :

- $\mathrm{Re}(zz') = \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Re}(z')-\mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(z')$
- $\mathrm{Im}(zz') = \mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z')+\mathrm{Re}(z')\mathrm{Im}(z)$
- $\mathrm{Re}(iz) = -\mathrm{Im}(z)$
- $\mathrm{Im}(iz) = \mathrm{Re}(z)$

D Produit nul.

Proposition 4

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a alors
$$zz' = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z' = 0$$

Rem 6. Ce qui est vrai pour $\mathbb{R}$ est vari pour $\mathbb{C}$ ici.

Démonstration 3. Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ dans $\mathbb{C}$

$$zz' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} ac - bd = 0 \\ bc + ad = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} abc - b^2 d = 0 \\ abc + a^2 d = 0 \end{cases} \Rightarrow a^2 d + b^2 d = d(a^2 + b^2) = 0 \Rightarrow d = 0 \text{ ou } (a^2 + b^2) = 0$$

$$\Rightarrow d = 0 \text{ ou } (a = 0 \text{ et } b = 0) \Rightarrow d = 0 \text{ ou } z = 0$$

Si d=0 On réinjecte alors ce résultat dans notre système de départ. On a alors

$$\begin{cases} ac = 0 \\ bc = 0 \end{cases}$$

Donc

- Soit c=0 est $z' = 0$ (puisque d=0)
- Soit $c \neq 0$ et alors $a = b = 0$ et donc $z = 0$.

Donc $zz' = 0 \Leftrightarrow z = 0 \quad \text{ou} \quad z' = 0$.

Rem 7. Contrairement à ce que l'on a vu sur $\mathbb{R}$ il n'y a pas sur $\mathbb{C}$ de relation d'ordre total naturelle. Il est alors impossible de comparer entre eux les éléments de $\mathbb{C}$.

E Le plan complexe $\mathcal{P}$

Considérons le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Définition-Proposition 5

Au point M tel que $\overrightarrow{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$, associe $z = a + ib$. A chaque point M correspond un unique affixe et inversement à chaque affixe correspond un unique point M.

De même au vecteur $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$, associe $z = a + ib$. A chaque vecteur $\vec{w}$ correspond un unique affixe et inversement à chaque affixe correspond un unique vecteur $\vec{w}$.

On parle du plan comme du plan complexe.

Rem 8. Cette correspondance entre l'aspect géométrique et algébrique est fondamental.

Vidéo 3. Représentation.

F Conjugué d'un nombre complexe, module d'un nombre complexe

1 Définition.

Définition-Proposition 6

Conjugué d'un nombre complexe Soit $z = a + ib$ un nombre complexe écrit sous forme algébrique. On définit le complexe conjugué de z (ou simplement le conjugué de z), noté $\overline{z}$ par
$$\overline{z} = a - ib$$

On remarque immédiatement que l'application :

$$\begin{array}{cccc} S & : & \mathcal{P} & \rightarrow & \mathcal{P} \\ & & M(z) & \mapsto & M'(\overline{z}) \end{array}$$

est la symétrie d'axe (ox)

Rem 9. En effet : $M(a, b)$ et $M'(a; -b)$ sont symétriques par rapport à (Ox).

2 Propriétés.

Théorème 7

L'application $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & \overline{z} \end{array}$ vérifie $f \circ f(z) = z$. (i-e $\overline{\overline{z}} = z$)

De plus, on a, pour $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{\lambda z_1} = \lambda \overline{z_1}$
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

Démonstration. On vérifie aisément que $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$, f est donc bien une bijection de bijection réciproque f.

De plus si $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ alors on a

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \qquad z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

$$\overline{\lambda z} = \lambda a_1 - i\lambda b_1 = \lambda(a_1 - ib_1) = \lambda \overline{z}$$

et enfin

$$\overline{z_1 + z_2} = (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2) = (a_1 - ib_1) + a_2 - ib_2) = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\begin{aligned} \overline{z_1}\,\overline{z_2} &= (a_1 - ib_1)(a_2 - ib_2) \\ &= (a_1 a_2 - (-b_1)(-b_2)) + i(a_1(-b_2) + a_2(-b_1)) \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) - i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \\ &= \overline{z_1 z_2} \end{aligned}$$

□

3 Lien entre conjugué et les parties réel et imaginaire.

Proposition 8

Soit $z \in \mathbb{C}$ on a alors les propriétés suivantes

- $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$
- $z = -\overline{z} \iff z \in i\mathbb{R}$, i.e. z est imaginaire pur.
- $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$
- $z - \overline{z} = 2\mathrm{Im}(z)$
- $z\overline{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 \in \mathbb{R}_+$
- Si $z = a + ib \neq 0$ alors $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{a^2+b^2}$

Démonstration. Cette proposition découle aisément de la définition et des propositions précédentes. □

G Module d'un nombre complexe.

1 Définition.

Définition-Proposition 9

Module d'un nombre complexe Soit $z \in \mathbb{C}$. On définit le module de z, noté $|z|$ par

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$$

[0.6cm] Si on note M le point d'affixe z, alors :

$$OM = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = |z|$$

Si A et B sont deux points de $\mathcal{P}$ d'affixes respectifs z_A et z_B, alors :

$$AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = |z_B - z_A|$$

Rem 10. Si $z = a + i0 \in \mathbb{R}$ alors le module de z coïncide avec la valeur absolue de a, d'où l'utilisation de la même notation.

Vidéo 4. Calcul du module.

2 Lien entre module et les parties réel et imaginaire.

Proposition 10

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a les propriétés suivantes :

- $|z| \geqslant 0$ et $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
- $\mathrm{Re}(z) \leqslant |z|$ et $\mathrm{Re}(z) = |z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_+$.
- $\mathrm{Im}(z) \leqslant |z|$ et $\mathrm{Im}(z) = |z| \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}_+$.
- $|z| = |\overline{z}|$.
- $|\lambda z| = |\lambda|\,|z|$.
- $|z|^2 = z\overline{z}$ et, si $z \neq 0$, $\overline{z} = \frac{|z|^2}{z}$, $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$. En particulier, si $|z| = 1$ on a $\frac{1}{z} = \overline{z}$.
- $|zz'| = |z|\,|z'|$ et, si $z' \neq 0$, $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$.
- On a de nouveau l'inégalité triangulaire

  $$|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$$

  et $|z + z'| = |z| + |z'|$ si et seulement si $zz' = 0$ ou s'il s'il existe $\mu \in \mathbb{R}_+$ tel que $z' = \mu z$.
- On a également

  $$\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z - z'|$$

Rem 11. Toutes ces propriétés sont facilement vérifiables graphiquement.

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$ et $z = a + ib$ son écriture algébrique.

— $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geqslant 0$ et

$$|z| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

—

$$\mathrm{Re}(z) = a \leqslant |a| \leqslant \sqrt{a^2} \leqslant \sqrt{a^2 + b^2} \leqslant |z|$$

$$\mathrm{Re}(z) = |z| \Leftrightarrow a = \sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow a^2 = a^2 + b^2 \text{ et } a \geqslant 0 \Leftrightarrow b = 0 \text{ et } a \geqslant 0$$

—

$$\mathrm{Im}(z) = b \leqslant |b| \leqslant \sqrt{b^2} \leqslant \sqrt{a^2 + b^2} \leqslant |z|$$

$$\mathrm{Im}(z) = |z| \Leftrightarrow b = \sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow b^2 = a^2 + b^2 \text{ et } b \geqslant 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ et } b \geqslant 0$$

— $|\overline{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$.

—

— $|z|^2 == \sqrt{z\overline{z}}^2 = z\overline{z}$ et, si $z \neq 0$, en divisant par z on obtient $\overline{z} = \frac{|z|^2}{z}$ puis, en divisant par $|z|^2$ (qui est non-nul car $z \neq 0$) on a $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$. En particulier, si $|z| = 1$ on a $\frac{1}{z} = \overline{z}$.

—
$$|zz'| = \sqrt{zz'\overline{zz'}} = \sqrt{zz'\overline{z}\overline{z'}} = \sqrt{z\overline{z}}\sqrt{z'\overline{z'}} = |z|\,|z'|$$

Si $z' \neq 0$,
$$\left|\frac{z}{z'}\right| = |z|\left|\frac{1}{z'}\right| = |z|\left|\frac{\overline{z'}}{|z'|^2}\right| = |z|\frac{|z'|}{|z'|^2} \;=\frac{|z|}{|z'|}$$

—
$$\begin{aligned}|z+z'|^2 &= (z+z')(\overline{z+z'})\\ &= z\overline{z} + z'\overline{z} + \overline{z'}z + z'\overline{z'}\\ &= |z|^2 + z'\overline{z} + \overline{z'\overline{z}} + |z'|^2\\ &= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z'\overline{z}) + |z'|^2\\ &\leqslant |z|^2 + 2|z'\overline{z}| + |z'|^2\\ &\leqslant |z|^2 + 2|z'|\,|z| + |z'|^2\\ &\leqslant \big(|z|+|z'|\big)^2\end{aligned}$$

D'où, comme $|z+z'| \geqslant 0$ et $|z|+|z'| \geqslant 0$
$$|z+z'| \leqslant |z|+|z'|$$

Notons $z = a+ib$ et $z' = c+id$, et supposons que $|z+z'| = |z|+|z'|$. Alors, en suivant le raisonnement précédent, on a $2\operatorname{Re}(z'\overline{z}) = |z'\overline{z}|$, d'où $z'\overline{z} \in \mathbb{R}_+$, c'est-à dire
$$(ac+bd) + i(ad-bc) \in \mathbb{R}_+$$

Ainsi $ad = bc$. Si z ou z' est nul on a bien $ad = bc$ et $ac+bd \in \mathbb{R}_+$.
Supposons que ni z, ni z' ne soit nul. On a trois cas possibles :
- Si $a = 0$, alors $b \neq 0$ et donc $c = 0$, on prend alors $\mu = \frac{d}{b} \in \mathbb{R}$ et on a bien $z' = \mu z$.
- Si $b = 0$, alors $a \neq 0$ et donc $d = 0$, on prend alors $\mu = \frac{c}{a} \in \mathbb{R}$ et on a bien $z' = \mu z$.
- Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$, on prend alors $\mu = \frac{c}{a} = \frac{d}{b} \in \mathbb{R}$ et on a également $z' = \mu z$

Il reste à vérifier que $\mu \geqslant 0$.
- Si $a = 0$, on a $ac+bd = \mu b^2 \geqslant 0$, d'où $\mu \in \mathbb{R}_+$
- Si $b = 0$, on a $ac+bd = \mu a^2 \geqslant 0$, d'où $\mu \in \mathbb{R}_+$
- SI $a \neq 0$ et $b \neq 0$, on a $ac+bd = \mu(a^2+b^2) \geqslant$, d'où $\mu \in \mathbb{R}_+$.

Réciproquement si z ou z' est nul alors on a clairement $|z+z'| = |z|+|z'|$.
Enfin si on a $z' = \mu z$ avec $\mu \geqslant 0$ alors
$$\begin{aligned}|z+z'| &= |(1+\mu)z|\\ &= |1+\mu||z|\\ &= (1+\mu)|z|\\ &= |z| + \mu|z|\\ &= |z| + |\mu|\,|z|\\ &= |z| + |\mu z|\\ &= |z| + |z'|\end{aligned}$$

— D'après l'inégalité triangulaire
$$|z| = |(z-z')+z'| \leqslant |z-z'| + |z'| \qquad \text{et} \qquad |z'| = |(z'-z)+z| \leqslant |z'-z| + |z| \leqslant |z-z'| + |z|$$

Ainsi
$$|z| - |z'| \leqslant |z-z'| \qquad \text{et} \qquad |z| - |z'| \geqslant -|z-z'|$$

D'où
$$\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z-z'|$$

□

On peut généraliser l'inégalité triangulaire

Proposition 11

Soit $(z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, on a
$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

III Méthodes.

Méthode-exemple 1 (Déterminer la forme algébrique d'un quotient)

Si l'on veut obtenir la forme algébrique d'un quotient $\frac{z'}{z}$. On multiplie par le conjugué de z en "haut et en bas" :

$$\frac{z'}{z} = \frac{z'\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}z'}{|z|^2}$$

Exemple :

$$\frac{2-i}{5-2i} = \frac{(2-i)(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)} = \frac{12-i}{29} = \frac{12}{29} - \frac{1}{29}i$$

Méthode-exemple 2 (Résolution d'une équation du second degré)

Vidéo 5. Exemple.

$$x^2 - 2x + 5 = 0$$

On obtient $\Delta = 4 - 20 = -16 = (4i)^2$. Les solutions sont :

$$x_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2-4i}{2} = 1 - 2i \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2+4i}{2} = 1 + 2i$$

Méthode-exemple 3 (Placer un point d'affixe donné)

Vidéo 6. Obtenir une forme algébrique.

Voir Ex 22 page 121.

Méthode-exemple 4 (Lire l'affixe d'un point.)

Voir Ex 23 page 121.

Méthode-exemple 5 (Utiliser les propriétés du conjugué)

Ex 28 page 243

Méthode-exemple 6 (Rechercher un ensemble de points.)

Vidéo 7. Ensemble de points

Ex 29 page 243