

Chapitre 4 : droite, plan et vecteurs de l'espace.

Nous nous plaçons dans ce chapitre dans l'espace \mathcal{E} .

I Vecteurs de l'espace

A Définitions

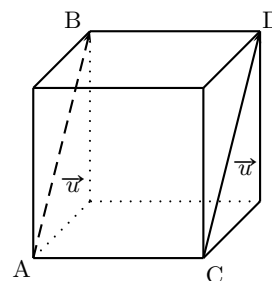
Définition 1

À tout couple $(A; B)$ de points de l'espace, on associe le vecteur \overrightarrow{AB} défini de la façon suivante :

- Si $A \neq B$, le vecteur \overrightarrow{AB} a :
 - pour **direction** celle de la droite (AB) ;
 - pour **sens** celui de A vers B ;
 - pour **norme** la longueur AB . On note $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$.
- Si $A = B$, le vecteur \overrightarrow{AA} est le vecteur nul, on le note $\vec{0}$.

Définition 2 (Égalité de deux vecteurs)

- Dire que deux vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont **égaux** signifie que $ABDC$ est un parallélogramme, éventuellement aplati.
Dans ce cas, \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont les **représentants** d'un même vecteur \vec{u} .
On note $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
- Pour tout point E de l'espace et tout vecteur \vec{v} , il existe un unique point F tel que $\overrightarrow{EF} = \vec{v}$.



Remarque : Deux vecteurs non nuls sont **égaux** lorsqu'ils ont même direction, même sens et même norme.

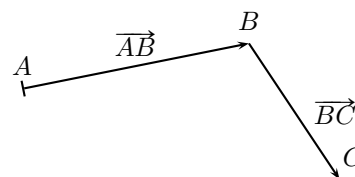
B Opérations sur les vecteurs

Les opérations sur les vecteurs du plan s'étendent aux vecteurs de l'espace.

Rappels

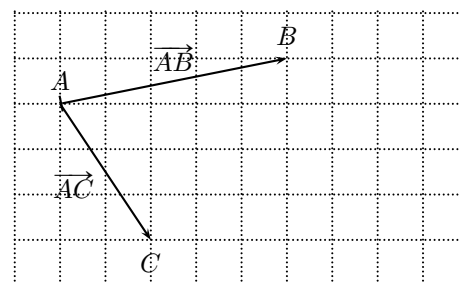
Relation de Chasles

Pour tous points A, B et C de l'espace on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

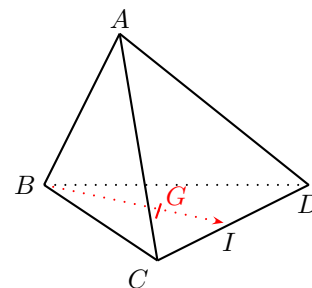


Règle du parallélogramme

Soit A, B et C trois points distincts. La somme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ est le vecteur \overrightarrow{AD} , où D est le point tel que $ABDC$ est un parallélogramme.



Exemple 1. ABCD est un tétraèdre de l'espace. I est le milieu de l'arête $[CD]$. G est le centre de gravité du triangle BCD .
Montrons que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$



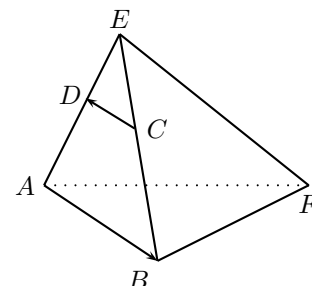
Exercices 2 à 7 page 295 puis 25 à 32 page 303

C Colinéarité, parallélisme et alignement

Définition 3

Dire que deux vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont **colinéaires** signifie que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Par convention, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.



Proposition 1

Deux vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si, et seulement si, il existe un nombre k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

Proposition 2

Trois points A , B et C de l'espace sont alignés si, et seulement si, les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires.
Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont colinéaires.

Théorème 3

A et B sont deux points distincts de l'espace.

La droite (AB) est l'ensemble des points M tels que \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{AB} sont colinéaires, c'est-à-dire l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$, avec t réel.

Vidéo 1

Démontrer l'alignement par décomposition de vecteurs

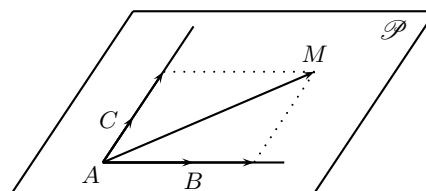
Exercices 10 et 11 page 297.

II Vecteurs coplanaires

Théorème 4

Soit A , B et C trois points non alignés de l'espace et soit \mathcal{P} le plan (ABC) .

Un point M appartient au plan \mathcal{P} si, et seulement si, il existe des réels x et y tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.



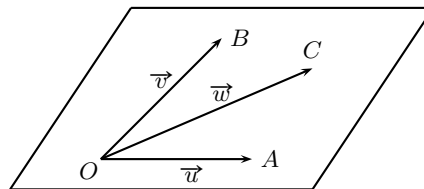
De façon générale, un plan est défini par un point A et deux vecteurs non colinéaires \vec{u} et \vec{v} . On parle alors du plan $(A; \vec{u}; \vec{v})$. On dit que \vec{u} et \vec{v} sont des **vecteurs directeurs** de ce plan.

Proposition 5

Deux plans qui ont deux vecteurs directeurs en commun sont parallèles.

Définition 4

Dire que les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont **coplanaires** signifie que pour un point O quelconque de l'espace, les points O, A, B et C définis par $\vec{OA} = \vec{u}$, $\vec{OB} = \vec{v}$ et $\vec{OC} = \vec{w}$ sont dans un même plan.



Proposition 6

\vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont des vecteurs de l'espace tels que \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires.
 \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont **coplanaires** si, et seulement si, il existe des nombres réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

Conséquences

1. Dire que 4 points A, B, C et D sont **coplanaires** équivaut à dire que les vecteurs \vec{AB} , \vec{AC} et \vec{AD} sont coplanaires.
2. Dire que les droites (AB) et (CD) sont **coplanaires** équivaut à dire que les vecteurs \vec{AB} , \vec{AC} et \vec{AD} sont coplanaires.
3. Dire que deux plans sont parallèles équivaut à dire que deux vecteurs non colinéaires de l'un et deux vecteurs non colinéaires de l'autre sont coplanaires.

Exercices 13 à 15 page 299 puis 33 à 50 page 303 à 305

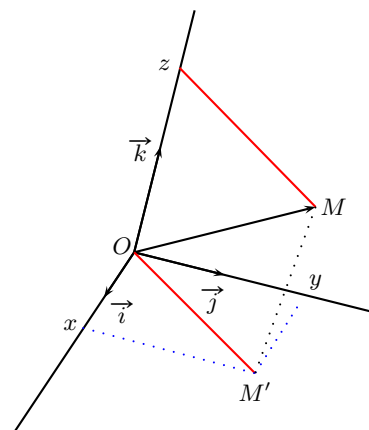
III Repérage dans l'espace

Définition 5

Un **repère de l'espace**, noté $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est formé d'un point O et d'un triplet $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ de vecteurs non coplanaires.

Proposition 7

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est un repère de l'espace.
 Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet $(x; y; z)$ de nombres réels tels que $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.



Vocabulaire : $(x; y; z)$ sont les coordonnées du point M ou du vecteur \vec{OM} dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.
 x est l'abscisse, y est l'ordonnée et z est la cote du point M dans ce repère.

Théorème 8

\vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont trois vecteurs **non coplanaires**.
 Pour tout vecteur \vec{V} , il existe un unique triplet de nombres $(x; y; z)$ tels que $\vec{V} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$.
 $(x; y; z)$ sont les **coordonnées de \vec{V}** dans la base $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w})$.

Calculs sur les coordonnées

- Si \vec{u} et \vec{v} ont pour coordonnées respectives $(x; y; z)$ et $(x'; y'; z')$ dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ alors :
 - le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées
 - pour tout réel λ , le vecteur $\lambda\vec{u}$ a pour coordonnées
- Si A et B ont pour coordonnées $(x_A; y_A; z_A)$ et $(x_B; y_B; z_B)$ alors :
 - le vecteur \vec{AB} a pour coordonnées
 - le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées

— Si le repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ est orthonormé alors : $\|\vec{u}\| = \dots\dots\dots$ et

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \dots\dots\dots$$

Exercices 51 à 68 page 305 à 306