

Chapitre 4 : droite, plan et vecteurs de l'espace.

Nous nous plaçons dans ce chapitre dans l'espace \mathcal{E} .

I Les attendus

- Positions relatives. *Page 271*
- Construire une section. *Page 273*
- Démontrer l'orthogonalité de deux droites. *Page 275*
- Appliquer le théorème du "toit". *Page 273*

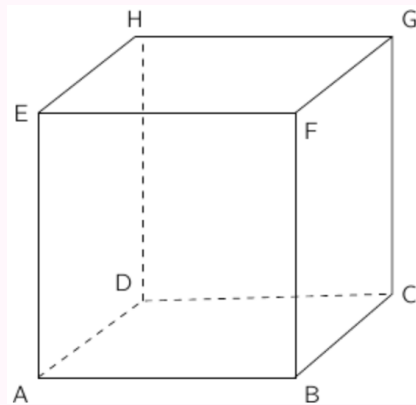
II Position relative de droite et de plan : exemple cube

A Positions relatives de deux droites.

Proposition 1

La position relative de deux droites de \mathcal{E} :

- Coplanaires (elles appartiennent à un même plan) :
 - Sécantes avec la cas particulier où elles sont perpendiculaires
 - Parallèles
 - Confondues
- Non coplanaires, avec le cas particulier elles sont orthogonales sans être sécantes.



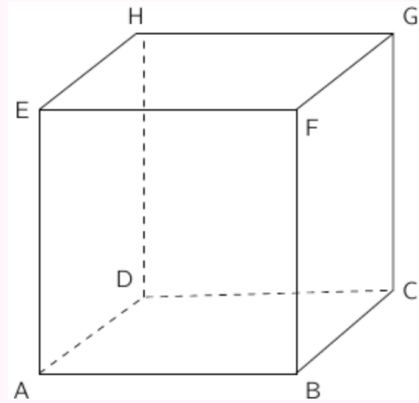
Figures exemples :

B Positions relatives d'une droite et d'un plan : exemple cube

Proposition 2

La position relative d'une droite et d'un plan de \mathcal{E} :

- Sécante, avec le cas particulier où la droite et le plan sont perpendiculaires
- Parallèles



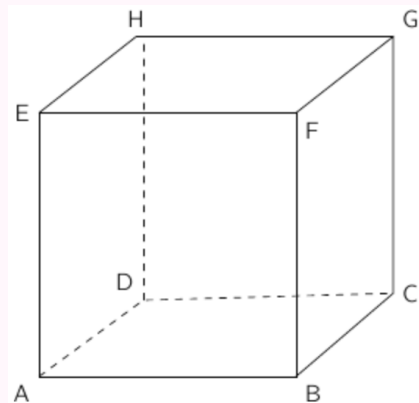
Figures exemples :

C Positions relatives de deux plans : exemple cube

Proposition 3

La position relative deux plans de \mathcal{E} :

- Sécante, avec le cas particulier où les deux plans sont perpendiculaires
- Parallèles



Figures exemples :

III Parallélisme dans l'espace

A Parallélisme de deux droites

Proposition 4

- Si deux droites sont parallèles, toute parallèle à l'une est parallèle à l'autre.
- Si deux droites sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'une coupera l'autre.

B Parallélisme d'un plan et une droite

Proposition 5

Si un plan \mathcal{P} contient une droite d parallèle à une droite Δ , alors \mathcal{P} et Δ sont parallèles.

Proposition 6

Si une droite d et un plan \mathcal{P} sont parallèles, alors tout plan contenant d et sécant à \mathcal{P} , coupe \mathcal{P} selon une droite parallèle à d .

Proposition 7

Si \mathcal{P} et \mathcal{R} sont deux plans sécants suivant la droite Δ .
Si une droite d de \mathcal{P} est parallèle à une droite d' de \mathcal{R} alors la droite Δ est parallèle à d et d' .

C Parallélisme de plans

Proposition 8

Si deux plans \mathcal{P} et \mathcal{R} sont parallèles alors :

- Tout plan parallèle à l'un est parallèle à l'autre
- Tout plan qui coupe l'un, coupe l'un coupe l'autre par une droite qui lui est parallèle

IV Orthogonalité dans l'espace

A Orthogonalité de deux droites

Définition 1

On dira que deux droites sont perpendiculaires si leur direction (voir chapitre sur les vecteurs) sont orthogonales. Deux droites sont perpendiculaires si elles sont orthogonales et sécantes.

B Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Définition 2

Une droite est perpendiculaire (ou orthogonale) à un plan, si elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

Proposition 9

Une droite est perpendiculaire (ou orthogonale) à un plan, si elle est orthogonale à deux sécantes ce plan.

C Propriétés

Proposition 10

- Si deux droites sont parallèles, alors tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.
- Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles.

Proposition 11

- Si deux plans sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.
- Deux plans orthogonaux à une même droite sont parallèles.

D Projeté orthogonal

Définition-Proposition 12

Soit un point M et un plan \mathcal{P} de l'espace. Le projeté orthogonal de M sur \mathcal{P} est l'unique point d'intersection de la perpendiculaire à \mathcal{P} passant par M avec le plan \mathcal{P} .

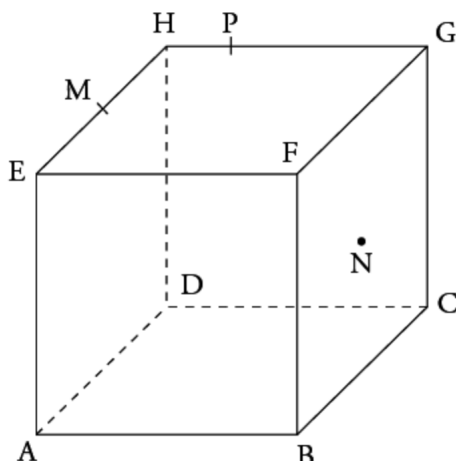
Définition-Proposition 13

Soit un point M et une droite d de l'espace. Le projeté orthogonal de M sur d est l'unique point d'intersection du plan perpendiculaire à d passant par M avec la droite d .

E Exercices

Exercice 1. On considère un cube $ABCDEFGH$ donné ci-dessous.

On note M le milieu du segment $[EH]$, N celui de $[FC]$ et P le point tel que $\overrightarrow{HP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HG}$.



Partie A

- Justifier que les droites (MP) et (FG) sont sécantes en un point L . Construire le point L .
- On admet que les droites (LN) et (CG) sont sécantes et on note T leur point d'intersection. On admet que les droites (LN) et (BF) sont sécantes et on note Q leur point d'intersection.
 - Construire les points T et Q en laissant apparents les traits de construction.
 - Construire l'intersection des plans (MNP) et (ABF) .
- En déduire une construction de la section du cube par le plan (MNP) .

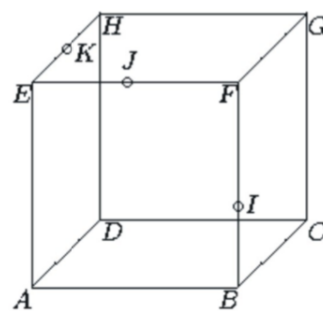
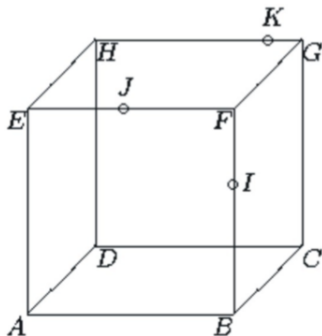
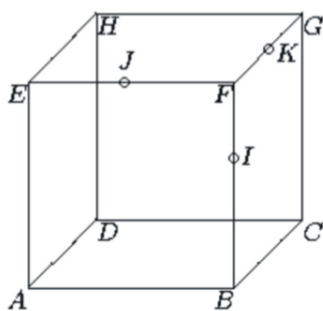
Partie B

L'espace est rapporté au repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

- Donner les coordonnées des points M , N et P dans ce repère.
- Déterminer les coordonnées du point L .
- Déterminer les coordonnées du point T . Le triangle TPN est-il rectangle en T ?

Corrigé

Exercice 2. Soit $ABCDEFGH$ un cube. Dans les trois cas suivants (K appartient au segment $[FG]$, K appartient au segment $[GH]$, K appartient au segment $[HE]$), tracer les sections du cube par le plan (JK) (I appartient au segment $[BF]$ et J appartient au segment $[EF]$) en perspective cavalière. **Corrigé**



Exercice 3. Exercice interactif

Exercice 4. Liste d'exercices corrigés.