

Chapitre 4 : Suites numériques partie I.

I Généralités

A Un peu d'histoire.

La notion de suite est présente dès qu'apparaissent des procédés illimités de calcul. En Égypte vers 1700 av. J.-C déjà. Chez Archimède (-287 à -212), spécialiste des procédés illimités d'approximation (séries géométriques de raison $1/4$) pour des calculs d'aires et de volumes.

Plus récemment au 1^{ier} siècle apr. J.-C. dans le procédé d'extraction d'une racine carrée par la méthode de Héron d'Alexandrie :

Pour extraire la racine carrée de A , on choisit un nombre arbitraire a et prendre la moyenne entre a et A et recommencer aussi loin que l'on veut le processus précédent.

En notation moderne, cela définit la suite de nombres $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{A}{u_n} \right)$.

La conjecture de Syracuse, encore appelée conjecture de Collatz : on part d'un nombre entier plus grand que zéro ; s'il est pair, on le divise par 2 ; s'il est impair, on le multiplie par 3 et on ajoute 1. En dépit de la simplicité de son énoncé, cette conjecture défie depuis de nombreuses années les mathématiciens.

B Attendus

- Savoir modéliser une situation donnée par une suite.
- Savoir représenter graphiquement les termes d'une suite.
- Savoir utiliser la premier bissectrice et la représentation de la fonction f pour obtenir les termes d'une suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.
- Programmer une suite récurrente sur sa machine.
- Écrire un algorithme permettant d'obtenir les termes d'une suite. *2 page 11*
- Déterminer la raison et le premier terme d'une suite arithmétique ou géométrique à partir de deux termes de la suite. (
- Savoir reconnaître une suite arithmétique ou géométrique. *1 page 13 et 1 page 15*
- Savoir déterminer la somme de termes d'une suite arithmétique ou géométrique. *3 page 13 et 3 page 15*
- Savoir déterminer la limite d'une suite arithmétique à partir de sa raison.
- Savoir déterminer la limite d'une suite géométrique à partir de son premier terme et de sa raison.
- Savoir déterminer la limite de la somme des termes d'une suite géométrique.
- Lorsque $0 < q < 1$, savoir déterminer à partir de quel rang q^n est inférieur à un nombre $a > 0$ donné.

II Génération d'une suite.

Définition 1

Une **suite** u est une **fonction** de définie de \mathbb{N} (parfois \mathbb{N}^*) dans \mathbb{R} . La notation utilisé pour $u(n)$ est plus communément u_n (lu "u indice n"). On parlera alors de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou plus simplement de (u_n) .

Exemple 1.

La fonction :

$$u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \quad . \\ n \mapsto n^2 + 1$$

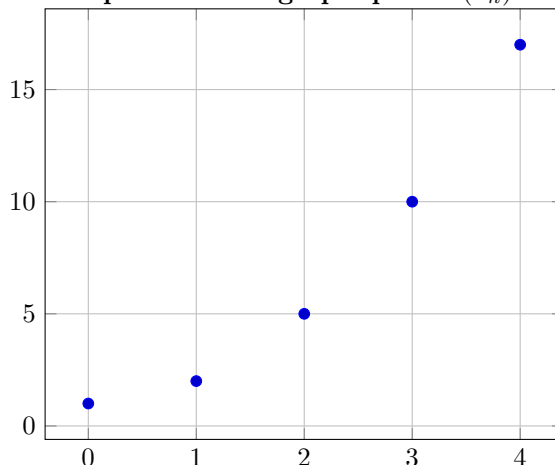
Donc on peut calculer les images, appelés termes de la suite :

$$u(0) = u_0 = 0^2 + 1 = 1 \quad ; \quad u(2) = u_2 = 2^2 + 1 = 5 \quad ; \quad u(10) = u_{10} = 10^2 + 1 = 101$$

Ou encore :

$$u(n+1) = u_{n+1} = (n+1)^2 + 1 = n^2 + 2n + 2 \quad ; \quad u(n-3) = u_{n-3} = (n-3)^2 + 1 = n^2 - 6n + 10 \quad (n \geq 3)$$

La représentation graphique de (u_n) :



Remarque 1. Pour l'exemple précédent, on parlera de la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_n = n^2 + 1$.

Ex 1 à 6 puis 8 page 30

Définition 2

On appelle suite récurrente, une suite dont le terme suivant est obtenue à partir d'un ou plusieurs terme(s) précédent(s).

Exemple 2. Un pays compte 300 loups en 2017. On estime que la population des loups croit naturellement au rythme de 12% par an. Pour réguler la population des loups, le gouvernement autorise les chasseurs à tuer un quota de 18 loups par an.

On modélise la population par une suite (u_n) , le terme u_n représentant le nombre de loups de ce pays en 2017 + n . On a alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1,12u_n - 18$.

Nous pouvons obtenir les termes 10 premiers termes de cette suite à partir de l'algorithme :

```

N ← 0
U ← 300
Tant que N < 10 faire
    U ← 1,12 × U - 18
    N ← N + 1
    Afficher U arrondi à l'entier
Fin Tant que
  
```

On obtient alors : 318 338 360 386 414 446 481 521 565 615

Ex 7-9 à 14 page 30-31

III Suites arithmétiques

Exercice 1. Louis perçoit 50 € d'argent de poche tous les mois depuis le premier janvier 2010. On note u_n la totalité de son argent poche cumulé (il a décidé de ne pas le dépenser).

- Déterminer u_0 puis u_1 puis u_2 , dites ce que représentent ces sommes.
- Déterminer u_{n+1} en fonction de u_n .
- Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n .
- Déterminer les variations de la suite (u_n) .
- Que pensez-vous de la limite de la suite (u_n) .

A Généralités.

Exemple 3. Bruno dispose de 100 € dans sa tirelire, donné par sa grand-mère. Bruno reçoit chaque mois 45 € de ses parents qu'il met systématiquement dans sa tirelire. On note u_n la somme dans sa tirelire au $n^{\text{ième}}$ mois. On obtient la formule de récurrence :

$$u_{n+1} = u_n + \underbrace{45}_{\text{Somme déposée chaque mois}}$$

On dira que (u_n) est une **suite arithmétique** de **raison** 45 et de **premier terme** $u_0 = 100$.

Définition 3

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **arithmétique** de raison r signifie que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = u_n + r$$

Remarque 2. Cette définition reste valable même si le premier terme de la suite n'est pas u_0 . Il arrive souvent que le premier terme de la suite soit u_1 .

Proposition 1

Si la suite (u_n) est arithmétique de raison r , alors

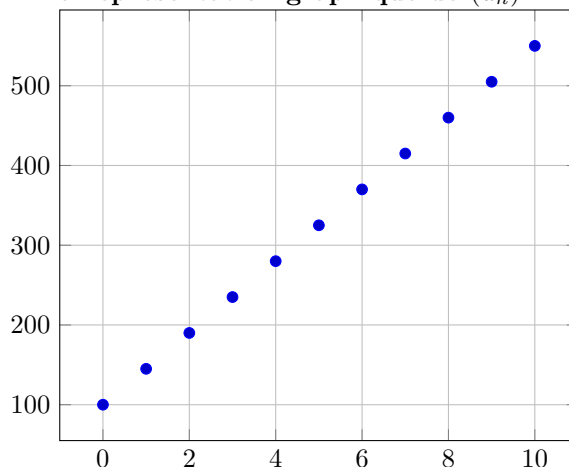
$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2 : u_n = rn + u_0 = (n - p)r + u_p$$

Démonstration 1. Idée de démonstration : On remarque que si $u_n = (n - p)r + u_p$ alors $u_{n+1} = u_n + r = rn + u_0 = (n - p)r + u_p + r = (n + 1 - p)r + u_p$. On dira que par "effet de domino" la propriété devient vrai à tous les termes $n \geq p$. De même dans pour $p \geq n$ mais avec $u_{n-1} = u_n - r$.

Remarque 3. On reconnaît l'expression d'une fonction affine et la représentation graphique sera constituée de points alignés.

Exemple 4. Si l'on reprend l'exemple précédent, on a $u_{n+1} = u_n + 45$. L'expression de u_n en fonction de n est donc $u_n = 45n + 100$.

La représentation graphique de (u_n) :



Vidéo 1

Déterminer la raison et le premier terme d'une suite arithmétique

Proposition 2

Si une suite (u_n) a pour terme générale $u_n = an + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$ est une suite arithmétique de raison a .

Démonstration 2. Si $u_n = an + b$ alors $u_{n+1} = a(n + 1) + b = an + b + a = u_n + a$. D'où le résultat.

Vidéo 2

Reconnaitre une suite arithmétique

Déterminer la raison et le premier terme d'une suite arithmétique

B Somme des termes d'une suite arithmétique.

Proposition 3

Somme des n premier entier :

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{1+n}{2} \times n$$

Soit (u_n) une suite arithmétique :

$$u_k + u_{k+1} + \dots + u_n = \frac{1^{ier} \text{ terme} + \text{dernier terme}}{2} \times (\text{nb de termes})$$

Démonstration 3. Deux cas :

- Si $n = 2p$ est pair :

$$1 + 2 + \dots + n = 1 + 2 + 3 + \dots + p + (p+1) + \dots + 2p = \underbrace{(1+2p) + (2+(2p-1)) + \dots + (p+(p+1))}_{p \text{ termes égaux à } 2p+1=n+1}$$

$$= p \times (n+1) = \frac{n}{2} \times (n+1)$$

- Si $n = 2p + 1$ est impair :

$$1 + 2 + \dots + n = 1 + 2 + 3 + \dots + p + (p+1) + \dots + 2p + (2p+1) = \underbrace{(1+2p) + (2+(2p-1)) + \dots + (p+(p+1))}_{p \text{ termes égaux à } 2p+1=n} + n$$

$$= p \times n + n = (p+1) \times n = \frac{1+n}{2} \times n$$

Exemple 5. Calcul de :

$$\sum_{k=1}^{100} k = 1 + 2 + \dots + 100 = \frac{1+100}{2} \times 100 = 5050$$

Exemple 6. Si (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2.

Calcul de :

$$\sum_{k=0}^{10} u_k = \underbrace{3}_{u_0} + \underbrace{3+2}_{u_1} + \underbrace{3+2 \times 2}_{u_2} + \dots + \underbrace{3+2 \times 10}_{u_{10}} = 3 \times 11 + 2 \times \frac{1+10}{2} \times 10 = 143$$

Calcul de :

$$\sum_{k=3}^{10} u_k = 9 + 11 + 13 + \dots + 23 = 9 \times \underbrace{8}_{\text{nb de "3"}} + 2 \times \frac{1+7}{2} \times 7 = 128$$

Vidéo 3

Somme des termes d'une suite arithmétique 1 et Somme des termes d'une suite arithmétique 1

Ex 31 à 37 page 32

C Variation et limite d'une suite arithmétique.

Proposition 4

On considère ici (u_n) comme une suite arithmétique.

- Si $r > 0$ la suite (u_n) est croissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- Si $r < 0$ la suite (u_n) est décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Vidéo 4

Comment étudier les variation d'une suite géométrique

IV Suites géométriques

A Généralités.

Exemple 7. On place une somme de 100 € sur un livret A rémunéré à 0,75 % par an. On note u_n la somme sur le compte à la $n^{\text{ième}}$ année. On obtient la somme de récurrence $u_{n+1} = \underbrace{1,0075}_{\text{pour augmenter de 0,75\%}} \times u_n$.

On dira que (u_n) est une **suite géométrique** de **raison** 1,0075 et de **premier terme** $u_0 = 100$.

Définition 4

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison q signifie que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = q \times u_n$$

Remarque 4. Cette définition reste valable même si le premier terme de la suite n'est pas u_0 . Il arrive souvent que le premier terme de la suite soit u_1 .

Proposition 5

Si la suite (u_n) est géométrique de raison q , alors

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2 : u_{n+1} = q^{n-p} \times u_0 = q^n \times u_p$$

Exemple 8. Si l'on reprend l'exemple précédent, on a $u_{n+1} = \underbrace{1,0075}_{\text{pour augmenter de 0,75\%}} \times u_n$.

L'expression de u_n en fonction de n est donc $u_n = 1,0075^n \times u_0 = 1,0075^n \times 100$.

Vidéo 5

Déterminer la raison et le premier terme d'une suite géométrique

Proposition 6

Une suite dont le terme générale s'écrit sous la forme aq^n est une suite géométrique de raison q .

Vidéo 6

Reconnaitre une suite géométrique 1 et Reconnaitre une suite géométrique 2

Ex 22 à 29 page 31-32

B Somme des termes d'une suite géométrique.

Proposition 7

Pour q un réel différent de 1 et un entier n , on a :

$$\sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

Exemple 9. Calcul de :

$$\sum_{k=0}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^{11}}\right)$$

%endcenter

Exemple 10. Si (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2.

Calcul de :

$$\sum_{k=0}^{10} u_k = 3 \times 2^0 + 3 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + \dots + 3 \times 2^{10} = 3 \times (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{10}) = 3 \frac{1 - 2^{11}}{1 - 2} = 3(2^{11} - 1)$$

Calcul de :

$$\sum_{k=3}^{10} u_k = 24 + 48 + 96 + \dots + 3 \times 2^{10} = 24 \frac{1 - 2^8}{1 - 2} = 24(2^7 - 1)$$

Vidéo 7

Somme des termes d'une suite géométrique

Ex 31 à 37 page 32

C Limite d'une suite géométrique.

Proposition 8

Soit q un réel **strictement positif**. On observe les deux cas suivants :

- Si $0 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
- Si $q = 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = q$.
- Si $1 < q$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

Proposition 9

On considère ici u_n comme une suite géométrique.

	1 ^{ier} terme > 0	1 ^{ier} terme < 0
Si $0 < q < 1$	$u_n \rightarrow 0$	$u_n \rightarrow 0$
Si $1 = q$	u_n constante	u_n constante
Si $1 < q$	$u_n \rightarrow +\infty$	$u_n \rightarrow -\infty$

Vidéo 8

Étude de la limite d'une suite géométrique :
vidéo 1 et vidéo 2

D Variation d'une suite géométrique.

Proposition 10

On considère ici u_n comme une suite géométrique.

	1 ^{ier} terme > 0	1 ^{ier} terme < 0
Si $0 < q < 1$	$u_n \searrow 0$	$u_n \nearrow 0$
Si $1 = q$	u_n constante	u_n constante
Si $1 < q$	$u_n \nearrow +\infty$	$u_n \searrow -\infty$

Vidéo 9

Comment étudier les variations d'une suite géométrique

E "Rapidité" de la convergence vers 0

Lorsque $0 < q < 1$ et que le premier terme est positif, on peut déterminer le rang à partir du quel les termes de la suite sont plus petit qu'un réel $A > 0$ donné. Voici un algorithme qui fonctionne :

1^{ière} étape affectation et saisie :

- choisir A
- $n=0$
- Entrer $u = 1^{ier}terme$ et $q = raison$

2^{ième} étape : boucle "tant que"

- Tant que $u_n \geq A$ faire
 - $n \leftarrow n + 1$
 - $u \leftarrow u \times q$

3^{ième} étape : afficher n .

V Suite récurrente.

Définition 5

On appelle suite récurrente, une suite dont le terme suivant est obtenue à partir d'un ou plusieurs terme(s) précédent(s).

Exemple 11. La suite récurrente (u_n) définie par $u_{n+1} = 0,6u_n + 0,1$ et $u_0 = 2$, est une suite récurrente de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 0,6x + 0,1$ fonction affine. (Dans ce cas l'on par de suite arithmético-géométrique qui n'est ni géométrique ni arithmétique comme son nom ne l'indique pas!)

A Représentation.

En traçant la première bissectrice (d'équation réduite $y = x$), on obtient :

