Chapitre 6 : Probabilités et Variables aléatoires.

Tout le cours en vidéo sur Maths-et-tiques

I Généralité.

A Histoire

La loi binomiale fait partie des plus anciennes lois de probabilités étudiées. Elle a été introduite par Jacques Bernoulli qui y fait référence en 1713 dans son ouvrage Ars Conjectandi. Entre 1708 et 1718, on découvre aussi la loi multinomiale (généralisation multi-dimensionnelle de la loi binomiale), la loi binomiale négative ainsi que l'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson, la loi des grands nombres pour la loi binomiale et une approximation de la queue de la loi binomiale.

Grâce à l'expression de sa fonction de masse, la loi binomiale a été utilisée par plusieurs scientifiques pour réaliser des calculs dans des situations concrètes. C'est le cas d'Abraham de Moivre qui réussit à trouver une approximation de la loi binomiale par la loi normale, il publie d'abord ses résultats en 1733 en latin : *Approximatio ad summam terminorum binomii* $(a + b)n$ *in seriem expansi*, puis les traduit pour les publier en 1738 dans *The Doctrine of Chances*. En 1812, Pierre-Simon de Laplace reprend ces travaux. Francis Galton crée la planche de Galton qui permet d'avoir une représentation physique de cette convergence. En 1909, Émile Borel énonce et prouve, dans le cas de la loi binomiale, la première version de la loi forte des grands nombres.

Plus récemment, en 1914, McKendrick démontre que la loi binomiale est la solution d'un processus simple de naissance et d'émigration. D'après les travaux de William Feller en 1957, elle peut aussi être vue comme la loi stationnaire pour le modèle des urnes d'Ehrenfest. Cette même année, Haight montre que la loi binomiale est liée à un problème de file d'attente.

La loi binomiale apparaît dans de nombreuses applications au xxe siècle : en génétique, en biologie animale, en écologie végétale, pour les tests statistiques, dans différents modèles physiques tels que des réseaux téléphoniques ou le modèle des urnes d'Ehrenfest, etc.

Le nom « binomiale » de cette loi provient de l'écriture de sa fonction de masse (voir ci-dessous) qui contient un coefficient binomial issu du développement du binôme : $(p + q)^n$

B Attendus.

- Modéliser une épreuve de Bernoulli. *(1 page 411)*
- Modéliser un schéma de Bernoulli par un arbre pondéré. *(1 page 411)*
- Reconnaitre une loi binomiale ainsi que déterminer ses paramètres. *(2-3 page 411)*
- Espérance, variance et écart type, d'une loi binomiale. *(Ex 3 page 411)*
- Savoir déterminer des coefficients binomiaux :
  - Á la calculatrice.
  - Avec le triangle de Pascal.
  - Ce qui n'est pas un attendu : avec la formule factorielle.
- Savoir utiliser la formule donnant la probabilité d'un évènement pour une loi binomiale et savoir obtenir le résultat à la calculatrice.
- Connaitre les formules sur les coefficients binomiaux et leurs démonstrations.
- Savoir interpréter l'espérance.
- Savoir écrire un algorithme permettant de simuler une expérience aléatoire.

C Démonstration à connaitre.

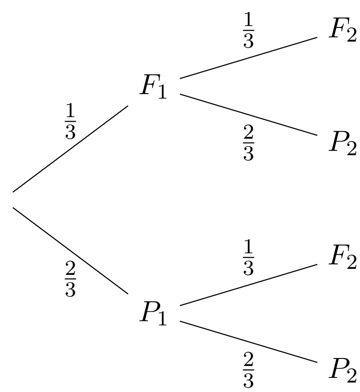
Expression de la probabilité de k succès dans le schéma de Bernoulli. *page 412*

II Arbre pondéré.

A Exemple simple.

Exemple 1. .

On considère ici une pièce mal équilibrée dont la probabilité d'obtenir face (évènement noté F) est de $\dfrac{1}{3}$ et celle d'obtenir pile (évènement noté P) est donc de $\dfrac{2}{3}$. On décide de lancer cette pièce deux fois. On peut simplement représenter cette expérience sous la forme d'un arbre pondéré :



Vidéo 1

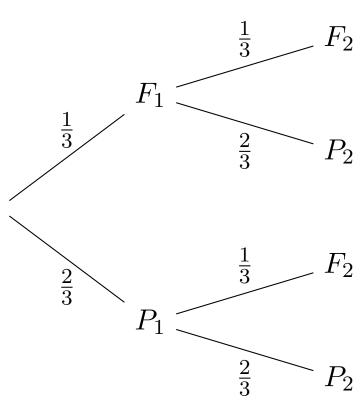
Représenter une situation par un arbre pondéré.

B Règles de fonctionnement d'un arbre pondéré.

Proposition 1

- La somme des probabilités des ***branches*** issues d'un même ***nœud*** est égale à 1.
- La probabilité d'une ***chemin*** (c'est-à-dire : partant de l'origine jusqu'à l'extrémité) est obtenu en faisant le produit des pondérations.
- Les probabilités de deux ***chemins*** s'ajoutent.

Exemple 2. Si l'on reprend l'exemple précédent :



$P\left(F_1 \cap F_2\right) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{9}$ (chemin)

$P\left(F_1 \cap P_2\right) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{9}$

$P\left(P_1 \cap F_2\right) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{9}$

$P\left(P_1 \cap P_2\right) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}$

Maintenant, si l'on veut déterminer la probabilité d'obtenir **une seule fois face** lors des deux lancers, c'est-à-dire :

- Face au premier et Pile au second : $F_1 \cap P_2$.
- Pile au premier et Face au second : $P_1 \cap F_2$.

On fait :

$$P(F_1 \cap P_2) + P(P_1 \cap F_2) = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9} \qquad \text{(Somme des deux "chemins")}$$

Si l'on note X le nombre de fois où l'on obtient face lors des deux lancers, on obtient la loi de probabilité :

Valeur :x_i	0	1	2
Probabilité : $P(X = x_i)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

Pour déterminer l'espérance :

$$E(X) = 0 \times \frac{4}{9} + 1 \times \frac{4}{9} + 2 \times \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Pour déterminer la variance :

$$V(X) = 0^2 \times \frac{4}{9} + 1^2 \times \frac{4}{9} + 2^2 \times \frac{1}{9} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

Enfin l'écart type :

$$E(X) = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

III Coefficient binomial.

Voir chapitre sur le dénombrement.

A Définitions.

Définition 1 (Schéma de Bernoulli)

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire à deux issues (que l'on nomme dans le langage probabiliste "succès" ou "échec".)
On dira de la variable aléatoire associé (valant 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec) qu'elle suit une loi de Bernoulli dont ***le paramètre*** sera la probabilité p du succès.

Remarque 1. Dans le cas d'une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p, la probabilité d'un échec est $1 - p$, c'est à dire $P(X = 0) = 1 - p$.

Définition 2

Lorsque l'on répète n fois une même expérience de Bernoulli. Si l'on considère l'arbre modélisant cette expérience, le nombre de chemin réalisant k succès correspond au ***coefficient binomial*** : ("combinaison de k parmi n") noté : $\binom{n}{k}$

Exemple 3. Si l'on reprend l'exemple précédent, on obtient :

$$\binom{2}{0} = \binom{2}{2} = 1 \qquad et \qquad \binom{2}{1} = 2$$

C'est-à-dire que l'on qu'un seul chemin réalisant 0 succès. On a aussi 1 seul chemin réalisant 2 succès. Et enfin, on a 2 chemins réalisant 1 succès exactement.

Exercice 1. On considère un dé à 6 faces et l'expérience de Bernoulli, lors du lancer du dé :

- Soit l'on obtient "1" (Succès) ;
- soit l'on n'obtient pas "1" (échec).

On décide de répéter cette expérience 3 fois (de façon indépendante) et l'on note X la variable aléatoire donnant le nombre de "1" (succès) obtenu lors de ces 3 lancers.

1. Réalisez un arbre pondéré représentant cette expérience.
2. Déterminer les coefficients binomiaux $\binom{3}{k}$ pour k variant de 0 à 3.
3. Compléter le tableau dans la loi de probabilité de X :

Valeur : x_i	0	1	2	3	Somme
$P(X = x_i)$				$\frac{1}{216}$	
$x_i \times P(X = x_i)$					
$x_i^2 \times P(X = x_i)$					

4. Déterminer l'espérance, la variance et l'écart type de cette série.

B Propriétés.

Proposition 2

Soients $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0; n]\!]$, on a les propriétés :

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ (ici k<n, cette formule est la formule de Pascal [1])
- $\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$ (Ici $k > 0$, $12^{ième}$ formule du traité de Pascal)

Démonstration 1. : Pour $(X = 0)$, il n'y a qu'un chemin qui permet d'obtenir cet évènement, donc $\binom{n}{0} = 1$. Idem pour $(X = n)$, on obtient : $\binom{n}{n} = 1$

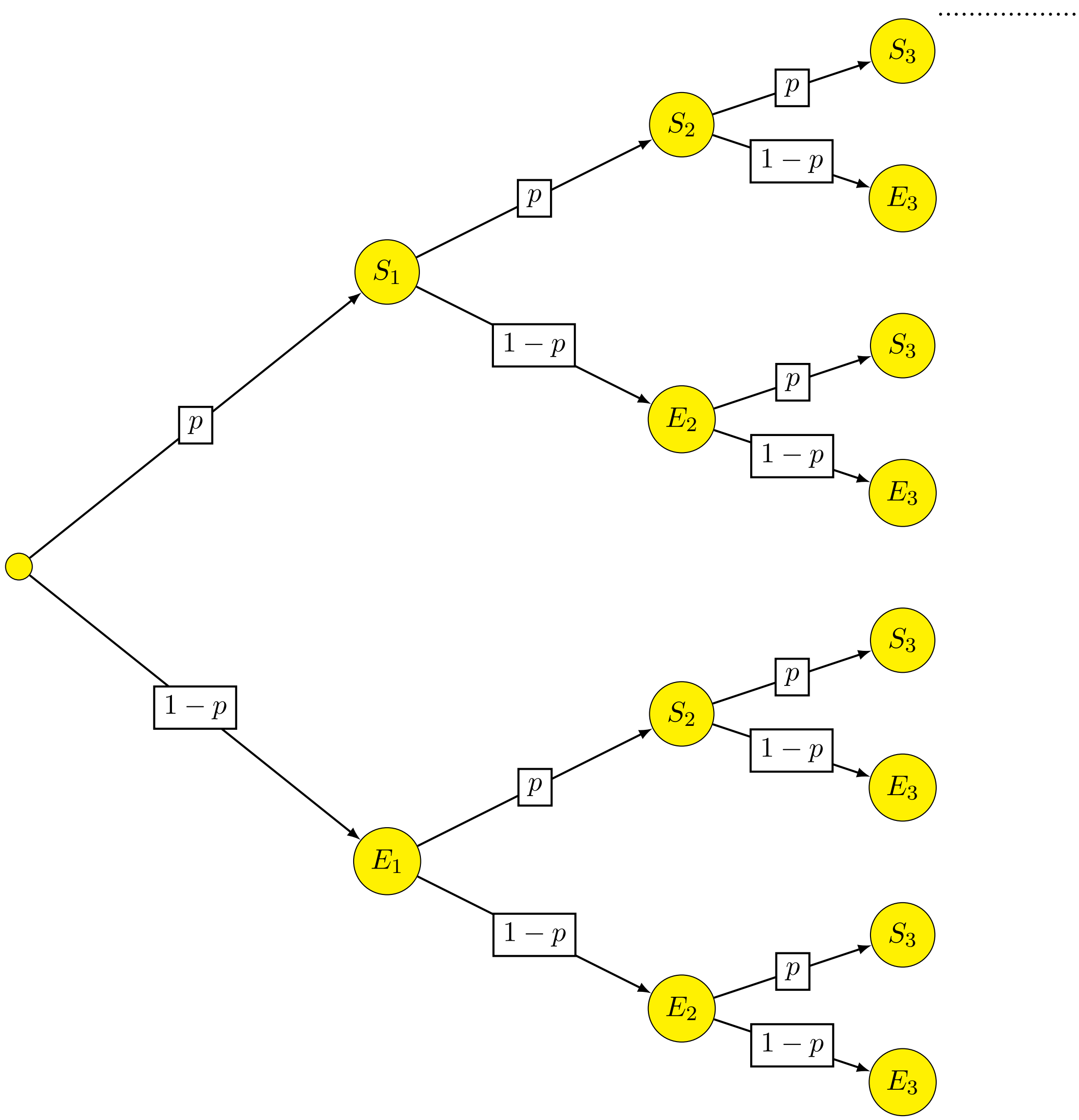
1. Les coefficients binomiaux étaient connus sous la forme du triangle en Orient et au Moyen-Orient (au X et au XI siècle) plusieurs siècles avant que Blaise Pascal (1623-1662) ne leur consacre un traité : « Traité du triangle arithmétique » en 1654 (publié à Paris en 1665) dans lequel il donne sa construction à l'aide de la formule qui porte son nom.

Démonstration 2. Le nombre permettant d'obtenir $(X = k)$ (c'est-à-dire obtenir) est le même que le nombre de chemin permettant d'obtenir k échecs par symétrie (c'est à dire $n - k$ succès). Donc :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

.

Démonstration 3. .



Si l'on commence à construire l'arbre représentant $n+1$ expériences de Bernoulli. Pour obtenir $k+1$ succès, nous pouvons décompter :

- Le nombre de chemin avec $k+1$ succès et commençant par un succès (c'est-à-dire commençant par S_1) au quel cas l'on complète par k succès lors de la répétition de n expériences. On obtient donc $\binom{n}{k}$ possibilités dans ce cas.
- Le nombre de chemin avec $k+1$ succès et commençant par un échec (c'est-à-dire commençant par E_1) au quel cas l'on complète par $k+1$ succès lors de la répétition de n expériences. On obtient donc $\binom{n}{k+1}$ possibilités dans ce cas.

On fait la somme du nombres de possibilités dans ces deux configurations et l'on obtient :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

Démonstration 4. Pour démontrer la formule : $\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$. Si l'on considère un chemin avec $(k-1)$ succès, pour obtenir un chemin à k succès il suffit de transformer un des $(n-k+1)$ échecs en un succès. On peut donc à partir de ce chemin obtenir $(n-k+1)$ chemin à k succès. Mais en procédant ainsi pour chaque chemin à $(k-1)$ succès, nous obtenons le même chemin k fois.
En effet si l'on considère le chemin $\underbrace{S-S-...-S}_{k\ succés}-\underbrace{E-E-...-E}_{(n-k)\ Echecs}$, ce chemin avec la technique précédente, peut être obtenue à partir des k chemins :

- $\underbrace{E-S-S-...-S}_{k\ succés}-\underbrace{E-E-...-E}_{(n-k)\ Echecs}$
- $\underbrace{S-E-S-...-S}_{k\ succés}-\underbrace{E-E-...-E}_{(n-k)\ Echecs}$
- ...
- $\underbrace{S-S-...-E}_{k\ succés}-\underbrace{E-E-...-E}_{(n-k)\ Echecs}$

On obtient donc :

$$\binom{n}{k} = \underbrace{\frac{1}{k}}_{k\ chemins\ comptés\ en\ trop.} \left(\underbrace{(n-k+1)}_{obtenu\ en\ échangeant\ un\ des\ (n-k+1)\ "E"\ en\ "S"} \binom{n}{k-1} \right)$$

C Calcul des coefficient binomiaux.

1 A la Calculatrice.

Méthode 1

A la Casio :
Dans le menu "RUN", appuyer sur la touche "OPTN", puis choisir "PROB".
Pour calculer $\binom{10}{3}$ taper 10, puis choisir nCr, puis taper 3 et EXE.
A la TI :
Pour calculer $\binom{10}{3}$, taper 10, puis appuyer sur la touche "MATH", choisir le menu "PRB", puis choisir "nCr" ou combinaison puis taper 3 et "ENTER".

2 Le triangle de Pascal.

A partir les valeurs initiales des coefficients binomiaux ($\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$) et de la formule de Pascal, on obtient **le triangle de Pascal** :

n \ k	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

A partir les valeurs initiales des coefficients binomiaux et de la formule $\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$

k \ (n-k+1)	1	2	3	4	5	6	
	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6	
2	1	3	6	10	15		
3	1	4	10	20			
4	1	5	15				
5	1	6					
8	1						

Vidéo 2

Triangle de Pascal.

3 Formule factorielle.

Cette formule n'est pas un attendu du programme :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \times k!} = \frac{\overbrace{n \times (n-1) \times ... \times (n-k+1)}^{k \text{ facteurs}}}{\underbrace{k \times (k-1) \times ... \times 1}_{k \text{ facteurs}}}$$

Méthode 2

Si l'on veut calculer :

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{7! \times 3!} = \frac{\overbrace{10 \times 9 \times 8}^{3 \text{ facteurs}}}{\underbrace{3 \times 2 \times 1}_{3 \text{ facteurs}}} = 120$$

Remarque 2. Nous pouvons définir les coefficients binomiaux à partir de cette formule *factorielle* et démontrer de façon algébrique, toutes les formules précédentes.

Vidéo 3

- Calcul des coefficients binomiaux 1
- Calcul des coefficients binomiaux 2

IV Loi binomiale.

A Définitions : Schéma de Bernoulli

Définition 3 (Schéma de Bernoulli)

Un schéma de Bernoulli est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Définition 4

Si l'on réalise un schéma de Bernoulli composé de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre p.
On dira de la variable aléatoire X qui donne le nombre de succès de l'expérience qu'elle suit une loi binomiale de paramètre n et p. On pourra noté $X \sim \mathcal{B}(n; p)$.

Méthode 3

Pour justifier qu'une expérience suit une loi binomiale, il faut rappeler les propriétés nécessaires.
Énoncé : On lance 5 fois une pièce bien équilibré et l'on note X le nombre de "Faces" obtenues.
Pour justifier que X suit une loi binomiale :

- Répétition d'une **même expérience** de **Bernoulli** : le lancer d'une pièce avec donc **deux issues possibles** (Faces : "succès", Pile : "Échec")
- De façon indépendante : Le résultat du lancer précédent n'aura pas d'influence sur le lancer suivant.

Vidéo 4

Reconnaitre un schéma de Bernoulli.

B Loi Binomiale.

1 Loi de probabilité.

Proposition 3

Si l'on considère un schéma de Bernoulli modélisé par la variable aléatoire $X \sim \mathcal{B}(n; p)$ (c'est-à-dire : répétition de n expériences de Bernoulli de paramètre p de façon indépendante). Alors :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

(probabilité de réaliser k succès sur les n expériences)

Démonstration 5. La probabilité de réalisation d'un chemin réalisant k succès est $p^k(1-p)^{n-k}$. Or il y a par définition $\binom{n}{k}$ chemins. En appliquant les règles de fonctionnement sur les arbres, on obtient par sommation des chemins :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Méthode 4

Si l'on considère une urne avec 3 boules blanches et 7 boules noires. On tire une boule au hasard une boule dans cette urne, **puis on la remet**. On répète cette expérience 10 fois. On décide de noté X la variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches obtenues sur l'ensemble des 10 tirages. On a :

- 10 répétitions d'une **même expérience** de **Bernoulli** : le tirage d'une boule **deux issues possibles** (On obtient "une boule blanche" : "succès", On n'obtient pas "une boule blanche" : "Échec")
- De façon indépendante : Puisqu'à chaque tirage on remet la boule dans l'urne, le tirage précédent n'a pas d'influence sur le tirage suivant.

Donc $X \sim \mathcal{B}\left(10; \frac{1}{6}\right)$ Pour déterminer par exemple :

$$P(X=2) = \underbrace{\binom{10}{2}}_{45} \times 0,3^2 \times 0,7^8 \simeq 0,233 \quad \text{à } 10^{-3} \; près$$

Ou pour déterminer par exemple :

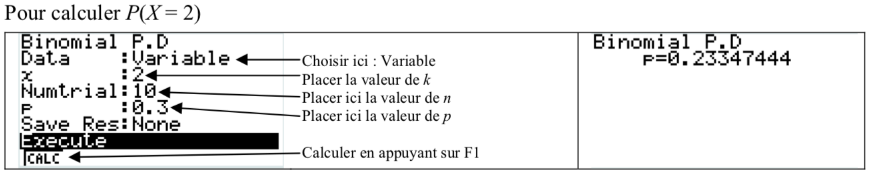
$$P(X \leqslant 2) = \underbrace{\binom{10}{0}}_{1} \times 0,3^0 \times 0,7^{10} + \underbrace{\binom{10}{1}}_{10} \times 0,3^1 \times 0,7^9 + \underbrace{\binom{10}{2}}_{45} \times 0,3^2 \times 0,7^8 \simeq 0,383 \quad \text{à } 10^{-3} \; près$$

Méthode 5

A la calculatrice Casio : Menu "Stat", choisir "DIST", puis "BINM", puis :

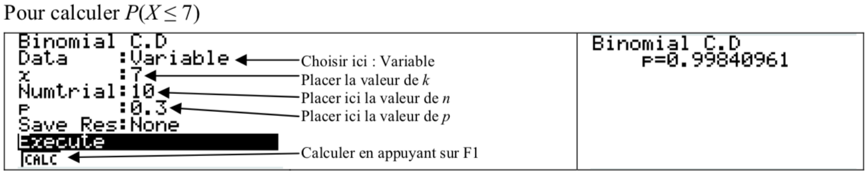
Calcul de $P(X=k)$: choisir Bpd

Pour calculer $P(X=2)$



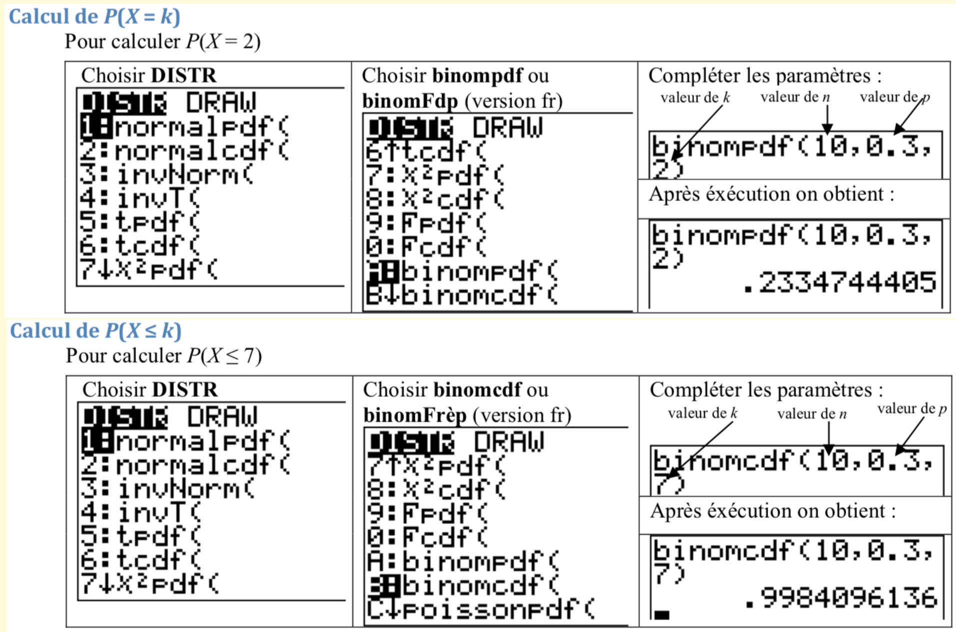
Calcul de $P(X \leq k)$: choisir Bcd

Pour calculer $P(X \leq 7)$



Méthode 6

A la calculatrice TI : Taper "2^{nd} DISTR", puis :



Vidéo 5

Calcul d'une probabilité.
Exemple de calcul à la machine.

2 Espérance, variance et écart type de $X \sim \mathcal{B}(n;p)$.

Proposition 4

Si $X \sim \mathcal{B}(n;p)$ alors :

- $E(X) = np$
- $V(X) = np(1-p)$
- $\sigma(X) = \sqrt{npq}$

Démonstration 6. Admise.

Vidéo 6

Exemple de calcul
Autre exemple

Exemple 4. Si l'on reprend les exemples précédents dans lesquels nous avons étudiez une loi binomiale (sans le savoir). Nous pouvons vérifier que l'on obtient les mêmes résultats.