Chapitre 5 : Résumé Loi binomiale.

I Rappels.

Valeur :x_i	x_1	x_2	...	x_n
Probabilité : $P(X = x_i)$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	...	$P(X = x_n)$

Pour l'espérance : $E(X) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k P(X = x_n)$

Pour la variance : $V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 P(X = x_n) - E(X)^2$

Pour l'écart type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

II Loi binomiale

Définition 1

- **Une épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire à deux issues (que l'on nomme dans le langage probabiliste "succès" ou "échec".)
  On dira de la variable aléatoire associé (valant 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec) qu'elle suit une loi de Bernoulli dont ***le paramètre*** sera la probabilité p du succès.
- Lorsque l'on répète n fois une même expérience de Bernoulli. Si l'on considère l'arbre modélisant cette expérience, le nombre de chemin réalisant k succès correspond au ***coefficient binomial*** : ("combinaison de k parmi n") noté : $\binom{n}{k}$

A Coefficients binomiaux

Proposition 1

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0;n]\!]$, on a les propriétés :

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ (ici k<n, cette formule est la formule de Pascal [1])
- $\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$ (Ici $k > 0$, $12^{ième}$ formule du traité de Pascal)
- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \times k!} = \frac{\overbrace{n \times (n-1) \times ... \times (n-k+1)}^{k \text{ facteurs}}}{\underbrace{k \times (k-1) \times ... \times 1}_{k \text{ facteurs}}}$ (Formule factorielle.)

Comme : $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

n \ k	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Comme : $\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$

k \ (n-k+1)	1	2	3	4	5	6	
	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6	
2	1	3	6	10	15		
3	1	4	10	20			
4	1	5	15				
5	1	6					
8	1						

Méthode 1

Si l'on veut calculer :

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{7! \times 3!} = \frac{\overbrace{10 \times 9 \times 8}^{3 \text{ facteurs}}}{\underbrace{3 \times 2 \times 1}_{3 \text{ facteurs}}} = 120$$

B Définitions : Schéma de Bernoulli

Définition 2

- Un schéma de Bernoulli est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.
- Si l'on réalise un schéma de Bernoulli composé de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre p.
  On dira de la variable aléatoire X qui donne le nombre de succès de l'expérience qu'elle suit une loi binomiale de paramètre n et p. On pourra noté $X \sim \mathcal{B}(n;p)$.

C Loi Binomiale.

Proposition 2

Si l'on considère un schéma de Bernoulli modélisé par la variable aléatoire $X \sim \mathcal{B}(n;p)$ (c'est-à-dire : répétition de n expériences de Bernoulli de paramètre p de façon indépendante). Alors :

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

(probabilité de réaliser k succès sur les n expériences)

Proposition 3

Si $X \sim \mathcal{B}(n;p)$ alors :

- $E(X) = np$
- $V(X) = np(1-p)$
- $\sigma(X) = \sqrt{npq}$