Résumé chapitre 6 : Produit scalaire.

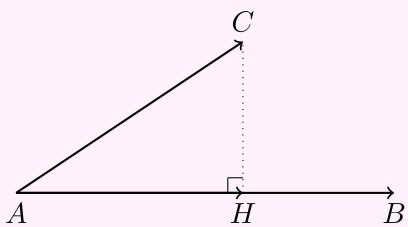
Notation : On notera $\mathscr{P}$ le plan et $\left(O;\overrightarrow{i};\overrightarrow{j}\right)$ un repère orthonormé du pan. Dans l'ensemble de ce chapitre on se situera dans ce plan. On choisit I et J de sorte que $\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{OJ}=\overrightarrow{j}$.

Définition-Proposition 1

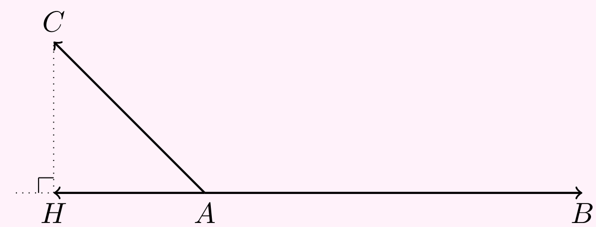
Soit A, B et C trois points du plan (A et B distincts). Soit H l'intersection de la droite (AB) de la perpendiculaire à la droite (AB) passant par C. Le point H est appelé le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). Dés lors le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ avec $\overrightarrow{AC}$ est définie par :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overline{AB}\times\overline{AH}=\begin{cases} AB\times AH & \text{si } \overline{AB} \text{ et } \overline{AH} \text{ de même signe.}\\ -AB\times AH & \text{si } \overline{AB} \text{ et } \overline{AH} \text{ de signe différent.}\end{cases}$$

si $\overline{AB}$ et $\overline{AH}$ de même signe.



si $\overline{AB}$ et $\overline{AH}$ de signe différent.



Si l'on a $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs du plan, alors $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. Si l'un des vecteurs est nul alors $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$. Sinon :

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\|\overrightarrow{u}\|\times\|\overrightarrow{v}\|\times\cos\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)$$

Ou dans un triangle ABC, on a :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\underbrace{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\times\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)}_{=\pm AH \text{ suivant que l'angle soit obtus ou aigu}}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}&=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2-\|\overrightarrow{v}-\overrightarrow{u}\|^2\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2\right)\\&=\frac{1}{4}\left(\|\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}-\overrightarrow{u}\|^2\right)\end{aligned}$$

Soient deux vecteurs $\vec{u}:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}:\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$. On a :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$$

Proposition 2 (Propriétés algébriques du produit scalaire et conséquences)

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs du plan et λ et μ deux réels. On a :

- Alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2 \geqslant 0$ avec égalité si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$
- $\overrightarrow{u} \cdot (\lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{w}) = \lambda\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$ donc $(\lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{w}) \cdot \overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u}$

D'où les identités remarquables :

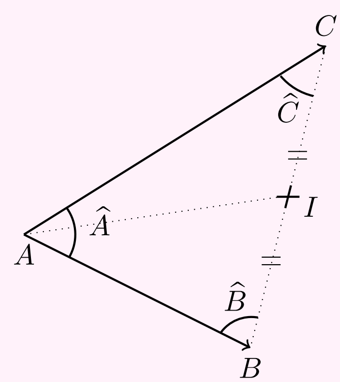
- $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2$
- $(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 - 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2$
- $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}^2 - \overrightarrow{v}^2$

Proposition 3

Soient A et B deux points de $\mathscr{P}$. L'ensemble des points M de $\mathscr{P}$, vérifiant : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Théorème 4 (Relations métriques dans le triangle)

Dans un triangle ABC, avec I milieu de $[BC]$:



- **Théorème de la médiane** :
$$AB^2 + AC^2 = AI^2 - \frac{BC^2}{4}$$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$
- **Théorème dit d'Al-Kachi** :
$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos\widehat{A} \end{aligned}$$
- l'aire : $S = \frac{1}{2}AB \times AC \sin\widehat{A}$
- $\dfrac{BC}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{AC}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{AB}{\sin\widehat{C}}$
- $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$

Proposition 5 (Certaines formules trigonométriques.)

soient a et b deux réels, alors :

- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\cos 2a = \cos^2 a - 1 = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
- $\sin 2a = 2\cos a \sin a$

Exercice 1. Déterminer le produit scalaire dans les cas suivant :

a) Si $\|u\| = 2$