Chapitre 6 : Suites numériques en 1STMG.

	Suite arithmétique	Suite géométrique
Formule de récurrence.	• $u_{n+1} = u_n + r$ (où r est la raison) Si $u_{n+1} - u_n = r$ alors (u_n) est arithmétiques de raison r.	• $v_{n+1} = q \times v_n$ (où q est la raison) Si $\frac{v_{n+1}}{v_n} = q$ alors (v_n) est géométrique de raison q.
Variations.	• Si $r > 0$ la suite (u_n) est croissante. • Si $r < 0$ la suite (u_n) est décroissante.	(voir tableau ci-dessous)
Expression en fonction de n.	• $u_n = nr + u_0$. • $u_n = (n-1)r + u_1$. (si la suite commence à u_1.)	• $v_n = q^n v_0$. • $v_n = q^{n-k} v_k$.

	1^{ier} terme > 0	1^{ier} terme < 0
Si $0 < q < 1$	$u_n \searrow 0$	$u_n \nearrow 0$
Si $q = 1$	u_n constante	u_n constante
Si $1 < q$	$u_n \nearrow +\infty$	$u_n \searrow -\infty$

1 Exemple de suite arithmétique.

La grand mère de Philémon lui a donné en 2010 une somme de 100 €, puis chaque année elle lui donne 10€ de plus. Philémon décide de ne pas dépenser son argent et de systématiquement déposer ces sommes sur un compte épargne A. La suite (u_n) représente la somme donnée par la grand-mère à l'année $2010 + n$.
Ici, on obtient l'expression :

$$u_{n+1} = \underbrace{u_n}_{\text{Somme à l'année 2010+n}} + \underbrace{10}_{\text{Augmenté de 10 euros}}$$

Dés lors, nous pouvons affirmer que (u_n) est une suite arithmétique de raison 10 (somme ajouté chaque année) et de premier terme $u_0 = 100$.
On peut en déduire en déduire l'expression en fonction de n en utilisant la dernière ligne du tableau :

$$u_n = n \times r + u_0 = 10n + 100$$

Par exemple, si l'on souhaite connaitre la somme donnée par la grand-mère en 2015 (c'est-à-dire : 2010+15) il faut déterminer

$$u_{15} = 15 \times 10 + 100 = 250€$$

Si qui semble évident c'est que la somme donnée par la grand mère chaque année augmente. Ce sera le cas, chaque fois que la raison (ici 10 €) sera positive.

2 Exemple de suite géométrique.

Le grand-père de Philémon lui a donné en 2010 une somme de 100 €, puis chaque année il lui donne 8 % de plus que l'année précédente. La suite (v_n) représente la somme donnée par la grand-père à l'année $2010 + n$.
Ici, on obtient l'expression :

$$v_{n+1} = \underbrace{v_n}_{\text{Somme à l'année 2010+n}} \times \underbrace{1+0,08}_{\text{Augmenté de 8 \%}} = 1,08v_n$$

Dés lors, nous pouvons affirmer que (v_n) est une suite géométrique de raison 1,08 et de premier terme $v_0 = 100$.
On peut en déduire en déduire l'expression en fonction de n en utilisant la dernière ligne du tableau :

$$v_n = 1,08^n v_0 = 1,08^n 100$$

Par exemple, si l'on souhaite connaitre la somme donnée par le grand-père en 2015 (c'est-à-dire : 2010+15) il faut déterminer

$$v_{15} = 1,08^{15} 100 \simeq 317,20 \text{ euro}$$

Si qui semble évident c'est que la somme donnée par le grand-père chaque année augmente. Ce sera le cas, chaque fois que la raison (ici 1,08) sera supérieur à 1.

3 Exemple de suite ni arithmétique, ni géométrique.

On peut considérer une population de sangliers sur la commune de Munex, qui était de 1000 têtes en 2000, puis chaque année du fait des phénomène de reproduction, cette population augmente de 10 %. Pour éviter une trop grande prolifération de la population de sangliers, la commune décide d'autoriser l'abattage de 90 sangliers chaque année. Si on note w_n la population de sangliers à l'année $2000+n$, on obtient :

$$w_{n+1} = \underbrace{w_n}_{\text{population à l'année 200+N}} \times \underbrace{1,1}_{\text{augmenté de 10\%}} - \underbrace{90}_{\text{abattage de 90 sangliers.}} = 1,1w_n - 90$$

Si l'on utilise un tableur, on obtient :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Wn	1000	1010	1021	1033	1046	1061	1077	1095	1114	1136	1159	1185	1214	1245	1280	1318	1359	1405	1456	1512	1573	1640	1714	1795	1885

4 Exercices d'applications.

Exercice 1. Reprendre l'exemple précédent avec une somme initiale donnée par la grand-mère que vous choisirez vous même entre 51 et 99 € (mais qui ne doit pas être un multiple de 10) et une augmentation annuelle entre 1 et 9 €. Comme dans l'exemple, on modélisera la somme donnée à l'année $2010+n$ par la suite (u_n).

1. Déterminer les valeurs de u_1 , u_2 puis u_3.
2. Comme dans l'exemple, déterminer l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n. Puis donner la nature de la suite (arithmétique ou géométrique, ou aucun des deux) ainsi que son premier terme et sa raison, si c'est une suite arithmétique ou géométrique.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n comme dans l'exemple.
4. Déterminez la somme que donnerait la grand-mère en 2032.

Exercice 2. Reprendre l'exemple précédent avec une somme initiale donnée par la grand-père que vous choisirez vous même entre 51 et 99 € (mais qui ne doit pas être un multiple de 10) et une augmentation annuelle entre 1 et 9 %. Comme dans l'exemple, on modélisera la somme donnée à l'année $2010+n$ par la suite (v_n).

1. Déterminer les valeurs de v_1 , v_2 puis v_3.
2. Comme dans l'exemple, déterminer l'expression de v_{n+1} en fonction de v_n. Puis donner la nature de la suite (arithmétique ou géométrique, ou aucun des deux) ainsi que son premier terme et sa raison, si c'est une suite arithmétique ou géométrique.
3. En déduire l'expression de v_n en fonction de n comme dans l'exemple.
4. Déterminez la somme que donnerait le grand-père en 2032.

Exercice 3. On va cette fois considérer une population de

1. Déterminer les valeurs de v_1 , v_2 puis v_3.
2. Comme dans l'exemple, déterminer l'expression de v_{n+1} en fonction de v_n. Puis donner la nature de la suite (arithmétique ou géométrique, ou aucun des deux) ainsi que son premier terme et sa raison, si c'est une suite arithmétique ou géométrique.
3. En déduire l'expression de v_n en fonction de n comme dans l'exemple.
4. Déterminez la somme que donnerait le grand-père en 2032.