Chapitre 7 : Logarithme.

A Attendus

- Simplifier une expression. *Page 151*
- Savoir utiliser les formules de dérivation. *Page 155*
- Savoir résoudre une équation ou inéquation. 1 2 3 . *Page 151*
- Déterminer une limite. 1 2 3 *Page 155*
- Savoir étudier une fonction avec logarithme. 1 2 3 4 *Page 155*

B Définition

Pour la fonction exponentielle.
La fonction dérivée est $\forall x \in \mathbb{R},\ exp'(x) = exp(x)$.
on a le tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp(x)$		$+$	
$\exp(x)$	0 $\nearrow$	1 $\nearrow$	$+\infty$

La fonction exponentielle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. D'après le TVI chaque y valeur de $]0,+\infty[$ admet un unique antécédent que l'on notera $\ln y$:

$$\exp(x) = y \Leftrightarrow x = \qquad .$$

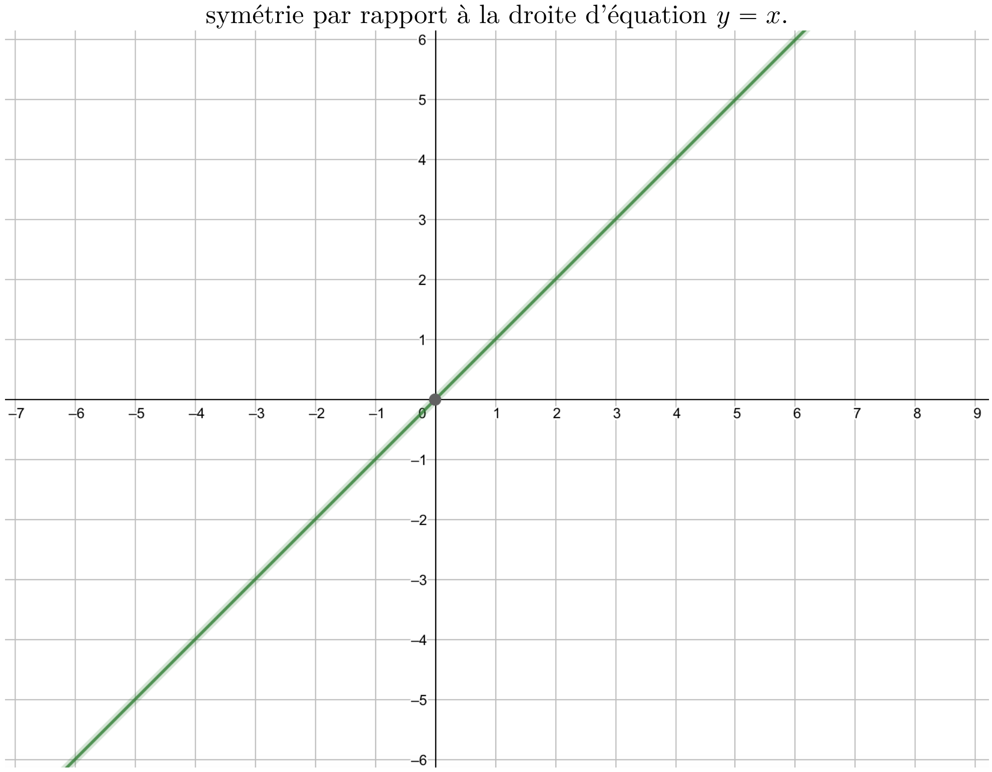
On définit ainsi la fonction ln de

$$\lim_{x \mapsto 0^+} \ln x = \qquad \text{et} \quad \lim_{x \mapsto +\infty} \ln x =$$

La tableau de variation est :

x	$-\infty$	$+\infty$
$\exp(x)$		
$\exp(x)$		

On déduit la représentation graphique de la fonction ln à partir de la représentation graphique de la fonction exp par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Définition 1

On dit que la fonction exp est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.
Si $e^x = y$, on dit que x est le logarithme népérien de y.
La fonction logarithme népérien, notée ln, est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ qui, à tout réel $x > 0$, associe le nombre noté $\ln(x)$ ou $\ln x$ dont l'exponentielle vaut x.

Proposition 1

- $\forall x \in]0,+\infty[\,,\ e^{\ln x} = x$.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln(e^x) = x$.

Proposition 2

Soient a et b deux réels de $]0,+\infty[$.

- $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$.
- $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$.
- $\ln a < 0 \Leftrightarrow a < 1$.
- $\ln a > 0 \Leftrightarrow a > 1$.

C Propriétés algébriques

Proposition 3

Pour $(x,y) \in]0,+\infty[^2$ et, pour $n \in \mathbb{Z}$ on a :

- $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
- $\ln\left(\dfrac{y}{x}\right) = \ln(y) - \ln(x)$
- $\ln(x^n) = n\ln(x)$
- $\ln(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2}\ln(x)$

D Limites remarquables

Proposition 4

$$\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\mapsto 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

E Dérivation

Proposition 5

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad (\ln\circ u)' = \frac{u'}{u}$$