Chapitre 7 : Suites partie II

I Comportement d'une suite.

A Variations.

Définition 1

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ est :
- croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$
- décroissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$

La suite (u_n) sera dite monotone lorsqu'elle est croissante ou décroissante.
Concrètement nous étudierons le signe de l'expression $u_{n+1} - u_n$ pour déterminer si la suite est croissante.

Proposition 1

Soit (u_n) une suite réel alors la suite (u_n) est :
- croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ (la croissance est strict si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n > 0$)
- décroissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ (la décroissance est strict si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n < 0$)

Soit (u_n) une suite à **valeurs strictement positives** alors la suite (u_n) est :
- croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ (la croissance est strict si $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$)
- décroissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ (la décroissance est strict si $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$)

Exemple 1. Soit le suite (u_n) définie par $\forall \in \mathbb{N}, u_n = n^2 + 2n - 3$. Montrons que (u_n) est croissante.

B Majoration, minoration.

Définition 2

Soit (u_n) une suite réelle.
- La suite (u_n) est dite majorée si : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$
- La suite (u_n) est dite minorée si : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant m$
- La suite (u_n) est dite bornée si : $\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n \leqslant M$

Exemple 2. Soit le suite (u_n) définie par $\forall \in \mathbb{N}, u_n = n^2 + 2n - 3$. Montrons que (u_n) est minorée par -3.

Exemple 3. Soit le suite (u_n) définie par $\forall \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = (0,5u_n - 1)^2 + 1$ et $u_0 = 4$. Montrons que (u_n) est minorée.

Exemple 4. Soit le suite (u_n) définie par $\forall \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{4}{u_n^2 + 1}$ et $u_0 = 1$. Est-elle bornée ?

C Notion intuitive de limite d'une suite

1 Recherche intuitive d'une limite.

Exemple 5. Soit le suite (u_n) définie par $\forall \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{4n-1}{n+3}$. Déterminer les premier terme de cette suite et indiquer s'il semble que la suite semble se rapprocher vers une valeur à déterminer.

```python
# Programmation d'une suite définie par une expression fonction de n
N=10
for n in range(N):
  U=(4*n-1)/(n+3)
  print(U)
```

Listing 1 – Python exemple

Exemple 6. Soit le suite (u_n) définie par $\forall \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{16}{u_n^2+4}$ et $u_0 = 10$. En déterminant les premiers termes de la suite, *discuter* de la convergence de la suite.

```python
# Programmation d'une suite définie par récurrence.
N=10000
U=10
for n in range(N):
    U=16/(U**2+4)
    print(U)
```

Listing 2 – Python exemple

Exemple 7. Soit le suite (u_n) définie par $\forall \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1.01u_n - 1$ et $u_0 = 0.99$. Déterminer intuitivement si la suite admet une limite.

2 Recherche de seuil

Exemple 8. Soit le suite (u_n) définie par $\forall \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{4n-1}{n+3}$. Déterminer les premier terme de cette suite et indiquer s'il semble que la suite semble se rapprocher vers une valeur à déterminer.

```python
# Programmation d'une suite définie par une expression fonction de n
N=0
n=3
U=10
While abs(U-2)>10**n:
  U=16/(U**2+4)
  N=N+1
print("Les termes de la suite un sont proches à 10 - ",n," près à partir
      de N=",N)
```

Listing 3 – Python exemple

Exemple 9. Soit le suite (u_n) définie par $\forall \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{16}{u_n^2+4}$ et $u_0 = 10$. Déterminer le seuil à partir du quel les termes de la suite sont proche de 2 à 0,001 près.

```python
# Programmation d'une suite définie par récurrence.
U=10
While abs(U-4)>10**n:
  U=(4*N-1)/(N+3)
  N=N+1
print("Les termes de la suite un sont proches à 10 - ",
    n," près à partir de N=",N)
```

Listing 4 – Python exemple

Exemple 10. Soit le suite (u_n) définie par $\forall \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1.01u_n - 1$ et $u_0 = 0.99$. Déterminer à partir de quelle valeur de n les termes de la suite (u_n) sont plus grands que 10000.

Exemple 11. Pour les suites récurrentes suivantes étudier les variations, la minoration ou la majoration et conjecturé leur limite possible ou non.

a) $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n^2 + 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1} \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} + 1 \end{cases}$

II Rappels sur les suites arithmétiques et géométriques.

<table>
<tr><th>.</th><th>Suite arithmétique</th><th>Suite géométrique</th></tr>
<tr><td>Formule de récurrence.</td><td>• $u_{n+1} = u_n + r$ (où r est la raison)
Si $u_{n+1} - u_n = r$ alors (u_n) est arithmétiques de raison r.</td><td>• $v_{n+1} = q \times v_n$ (où q est la raison)
Si $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = q$ alors (v_n) est géométrique de raison q.</td></tr>
<tr><td>Variations.</td><td>• Si $r > 0$ la suite (u_n) est croissante.
• Si $r < 0$ la suite (u_n) est décroissante.</td><td><table>
<tr><th></th><th>1^{ier} terme > 0</th><th>1^{ier} terme < 0</th></tr>
<tr><td>Si $0 < q < 1$</td><td>$u_n \searrow 0$</td><td>$u_n \nearrow 0$</td></tr>
<tr><td>Si $1 = q$</td><td>u_n constante</td><td>u_n constante</td></tr>
<tr><td>Si $1 < q$</td><td>$u_n \nearrow +\infty$</td><td>$u_n \searrow -\infty$</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>limite.</td><td>• Si $r > 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
• Si $r < 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.</td><td>• Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.
• Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} 1^n = 1$.
• Si $1 < q$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.</td></tr>
<tr><td>Expression en fonction de n.</td><td>• $u_n = nr + u_0$.
• $u_n = (n-k)r + u_k$.</td><td>• $v_n = q^n v_0$.
• $v_n = q^{n-k} v_k$.</td></tr>
<tr><td>Somme de termes.</td><td>• $\sum\limits_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
• $u_k + ... + u_n = \dfrac{1^{ier}\text{terme} + \text{dernier terme}}{2} \times \text{nb de termes}$</td><td>• $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + ... + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} = \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$
• $v_k + ... + v_n = 1^{ier}\text{terme} \times \dfrac{1-q^{\text{nb de termes}}}{1-q}$</td></tr>
</table>

1 Somme des termes d'une suite arithmétique.

Si l'on considère la suite arithmétique (u_n) de première terme $u_0 = \dfrac{57}{5}$ et de raison $r = \dfrac{-1}{2}$.

L'expression de u_n en fonction de n est : $u_n = u_0 + nr = \dfrac{57}{5} - \dfrac{1}{2}n$ (fonction affine).

Pour déterminer la somme des 20 premiers termes :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{20} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_{20} &= \underbrace{\frac{\frac{57}{5} + \frac{7}{5}}{2} \times 21}_{\text{deuxième formule}} \\
&= \frac{57}{5} - \frac{1}{2} \times 0 + \frac{57}{5} - \frac{1}{2} \times 1 + \frac{57}{5} - \frac{1}{2} \times 2 + ... + \frac{57}{5} - \frac{1}{2} \times 20 \\
&= \underbrace{\frac{57}{5} + \frac{57}{5} + \frac{57}{5} + ... + \frac{57}{5}}_{\text{21 fois}} - \frac{1}{2} \times 0 - \frac{1}{2} \times 1 - \frac{1}{2} \times 2 - ... - \frac{1}{2} \times 20 \\
&= 21 \times \frac{57}{5} - \frac{1}{2} \times (0 + 1 + 2 + ... + 20) = 21 \times \frac{57}{5} - \frac{1}{2} \times \frac{21 \times 20}{2} \\
&= \frac{1072}{5}
\end{aligned}$$

2 Somme des termes d'une suite géométrique.

Soit la suite géométrique (v_n) de première terme $v_0 = \dfrac{57}{5}$ et de raison $q = \dfrac{-1}{2}$.

L'expression de v_n en fonction de n est : $v_n = v_0 \times q^n = \dfrac{57}{5} \times \left(\dfrac{-1}{2}\right)^n$

Pour déterminer la somme des 20 premiers termes :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{20} u_k &= v_0 + v_1 + ... + v_{20} \\
&= \frac{57}{5} \times \left(\frac{-1}{2}\right)^0 + \frac{57}{5} \times \left(\frac{-1}{2}\right)^1 + \frac{57}{5} \times \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + ... + \frac{57}{5} \times \left(\frac{-1}{2}\right)^{20} \\
&= \frac{57}{5}\left[\left(\frac{-1}{2}\right)^0 + \left(\frac{-1}{2}\right)^1 + \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + ... + \left(\frac{-1}{2}\right)^{20}\right] \\
&= \underbrace{\frac{57}{5} \times \frac{1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^{21}}{1 + \frac{1}{2}}}_{\text{Directement avec la deuxième formule}} = \frac{38}{5}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{21}\right)
\end{aligned}$$