Chapitre 8 : Géométrie repérée.

Notation : On notera $\mathscr{P}$ le plan et $\left(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}\right)$ un repère orthonormé du pan. Dans l'ensemble de ce chapitre on se situera dans ce plan. On choisit I et J de sorte que $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{j}$.

I Équation de droite.

A Caractérisation

Définition 1

On appelle vecteur directeur à une droite d, tout vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul de même direction que la droite d.
On appelle vecteur normal à une droite d, tout vecteur $\overrightarrow{n}$ non nul dont la direction est orthogonale à la direction de la droite d.

Remarque 1. Si $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{u}$ sont respectivement un vecteur normal et un vecteur directeur d'une même droite d alors ils sont orthogonaux.

Proposition 1

Soit une droite d passant par un point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ alors :

$$M \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{u} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \overrightarrow{n} \text{ orthogonaux}$$

Démonstration 1. Évident puisque $\overrightarrow{AM}$ est de même direction que d ssi $M \in d$.

Ex 1 à 8 page 258

B Équations cartésiennes

1 A partir d'un vecteur normal

Proposition 2

- Une droite d de vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ a une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ où c est un nombre réel.
- La droite d d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ admet $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ pour vecteur normal.

Démonstration 2. Soit d une droite, $A(x_A, y_A)$ un point de d et $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur normal de d. Alors :

$$M(x, y) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a(x - x_A) + b(y - y_A) = ax + by - ax_A - bx_A = 0$$

Donc $c = -ax_A - bx_A$ convient pour que $ax + by + c = 0$ soit une équation de d.

Démonstration 3. La droite d d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ admet $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.
Si on pose $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, on a :

$$\vec{u}\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=-ba+ab=0$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux. Donc $\vec{n}$ est normal à d.

Vidéo 1

Déterminer l'équation d'une droite à partir d'un point et d'un vecteur normal. Autre exemple.

2 A partir d'un vecteur directeur

Proposition 3

- Une droite d de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ a une équation cartésienne de la forme $\beta x-\alpha y+c=0$ où c est un nombre réel.
- La droite d d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ admet $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.

Démonstration 4. Il suffit de remarquer que si $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$ alors $\vec{n}\begin{pmatrix}-\beta\\\alpha\end{pmatrix}$ est un vecteur normal.

Vidéo 2

Déterminer l'équation d'une droite à partir d'un point et d'un vecteur directeur

Ex 9 à 19 page 259

C Déterminer le projeté orthogonal d'un point sur une droite

Définition 2

Soit A un point du plan et d un droite du plan. Le projeté orthogonal de A sur d est le point H du plan vérifiant :

- $(AH)\perp d$
- $H\in d$

Définition-Proposition 4

Soit A un point du plan et d un droite du plan. Le distance du point A à la droite d est la valeur minimal entre A et n'importe quel point de d. On note

$$\mathrm{d}(A, d) = \inf_{M \in d} AM$$

Si h est le projeté orthogonal de A sur d alors

$$\mathrm{d}(A, d) = AH$$

Si d admet $ax + by = c = 0$ comme équation cartésienne, alors :

$$\mathrm{d}(A, d) = AH = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Démonstration 5. Soit A un point du plan et d un droite du plan. Soit H le projeté orthogonale de A sur d. Soit $n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur normale de d et $ax + by + c = 0$ une équation cartésienne de d.

- Si M est un point de d alors AMH est un triangle rectangle en H. Donc $AH \leqslant AM$ avec égalité si et seulement si $H = M$. (Attention si $A \in d$ c'est évident car $A = H$)
- $H \in d$ donc $ax_H + by_H + c = 0$, donc $-c = ax_H + by_H$. Par ailleurs, $\overrightarrow{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est $\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} x_H - x_A \\ y_H - y_A \end{pmatrix}$ sont colinéaires donc :

$$|\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{n}| = AH \times \|\overrightarrow{n}\| \Leftrightarrow AH = \frac{|\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{n}\|} = \frac{|a(x_H - x_A) + b(y_H - y_A)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

II Équation de cercles.

Proposition 5

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de rayon R et de centre $A(x_A, y_A)$ alors une équation cartésienne de $\mathscr{C}$ est :

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$$

Démonstration 6. Avec les hypothèses de la propriété :

$$M(x, y) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow AM^2 = R^2 = (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2$$

Proposition 6

Soient A et B deux points de $\mathscr{P}$. L'ensemble des points M de $\mathscr{P}$, vérifiant : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Démonstration 7. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$ alors :

$$M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \text{AMB est un triangle recatngle en M} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

Vidéo 3

- Déterminer l'équation d'un cercle
- Déterminer les éléments caractéristiques d'un cercle

Ex 33 à 42 page 261

III Parabole

Proposition 7

Soit a, b et c trois réels avec $a \neq 0$, l'ensemble des points $M(x, y) \in \mathscr{P}$ vérifiant :

$$y = ax^2 + by + c$$

est une parabole de sommet $S\left(\dfrac{-b}{2a}, f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)\right)$ en notant f comme étant la fonction polynomiale du second degré $f(x) = ax^2 + by + c$ (la parabole est bien sûr la représentation graphique de cette fonction polynomiale.

Démonstration 8. Voir livre page 248

Ex 20 à 32 page 260