Chapitre 4 : Nombres complexes.

I Nombres complexes : Aspect algébrique

Notation : Considérons le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$.

A Premières définitions

Définition 1

Soit i un élément non-réel tel que $i^2 = -1$. On définit l'ensemble $\mathcal{C}$ des nombres complexes par

$$\mathbb{C} = \{a + ib\ ,\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$$

On munit $\mathbb{C}$ d'une addition et d'une multiplication définies par, pour $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$,

$$(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d)$$

$$(a+ib)(c+id) = (ac-bd)+i(ad+bc)$$

Définition-Proposition 1

Soit $z \in \mathbb{C}$, il existe un unique couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = a+ib$. On appelle a la partie réelle de z et b la partie imaginaire de z, ce que l'on note

$$a = \mathrm{Re}(z) \qquad b = \mathrm{Im}(z)$$

On appelle l'écriture $z = a+ib$ l'écriture sous forme algébrique du nombre complexe z.

On identifie $\mathbb{R}$ et $\{a + i0\ ,\ a \in \mathbb{R}\}$ de sorte que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. On écrira simplement a plutôt que $a+i0$.

Si $\mathrm{Re}(z) = 0$ on dit de z qu'il est imaginaire pur, on le notera alors ib plutôt que $0+ib$. On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des imaginaires purs.

B Polynôme du second degré : généralisation.

Théorème 2

Résolution sur $\mathbb{R}$ des équations du second degré à coefficients réels Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$. On cherche les solutions de l'équation $ax^2+bx+c = 0$ d'inconnue x. Posons $\Delta = b^2-4ac$. On a alors

- Si $\Delta \geqslant 0$ l'équation $ax^2+b+x+c = 0$ admet deux solutions réelles $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. On appelle ces deux réels les racines du polynôme aX^2+bX+c, elles sont dites racines simples.
- Si en particulier $\Delta = 0$ alors les deux solutions sus-mentionnées sont confondues, on dit alors que $\frac{-b}{2a}$ est une racine double du polynôme aX^2+bX+c.
- Si $\Delta < 0$ alors l'équation $ax^2+bx+c = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées $\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$. On appelle ce deux complexes les racines du polynôme aX^2+bX+c, elles sont dites racines simples.

Notons x_1 et x_2 (éventuellement confondues) les deux solutions de l'équation $ax^2+b+x+c$. On a alors

$$ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) = a(x-x_1)(x-x_2) \quad \text{donc} \quad \frac{b}{a} = -(x_1+x_2) \qquad \text{et} \qquad \frac{c}{a} = x_1x_2$$

C Propriétés de la partie réel et de la partie imaginaire.

Proposition 3

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

- $\mathrm{Re}(z + \lambda z') = \mathrm{Re}(z) + \lambda\,\mathrm{Re}(z')$
- $\mathrm{Im}(z + \lambda z') = \mathrm{Im}(z) + \lambda \mathrm{Im}(z')$

D Le plan complexe $\mathcal{P}$

Définition-Proposition 4

Au point M tel que $\overrightarrow{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$, associe $z = a + ib$. A chaque point M correspond un unique affixe et inversement à chaque affixe correspond un unique point M.

De même au vecteur $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$, associe $z = a + ib$. A chaque vecteur $\vec{w}$ correspond un unique affixe et inversement à chaque affixe correspond un unique vecteur $\vec{w}$.

On parle du plan complexe.

E Conjugué d'un nombre complexe

1 Définition.

Définition-Proposition 5

Conjugué d'un nombre complexe Soit $z = a + ib$ un nombre complexe écrit sous forme algébrique. On définit le complexe conjugué de z (ou simplement le conjugué de z), noté $\bar{z}$ par

$$\bar{z} = a - ib$$

On remarque immédiatement que l'application $S \; : \; \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \to & \mathcal{P} \\ M(z) & \mapsto & M'(\bar{z}) \end{array}$ est la symétrie d'axe (Ox)

2 Propriétés.

Théorème 6

L'application $f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \bar{z} \end{array}$ vérifie $f \circ f(z) = z$. (i-e $\bar{\bar{z}} = z$)

De plus, on a, pour $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- $\overline{\lambda z_1} = \lambda \bar{z}_1$
- $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

3 Lien entre conjugué et les parties réelle et imaginaire.

Proposition 7

Soit $z \in \mathbb{C}$ on a alors les propriétés suivantes

- $z = \bar{z} \;\Leftrightarrow\; z \in \mathbb{R}$
- $z = -\bar{z} \;\Leftrightarrow\; z \in i\mathbb{R}$, i.e. z est imaginaire pur.
- $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$
- $z - \bar{z} = 2\mathrm{Im}(z)$
- $z\bar{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 \in \mathbb{R}_+$
- Si $z = a + ib \neq 0$ alors $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{a^2 + b^2}$

F Module d'un nombre complexe.

1 Définition.

Définition-Proposition 8 (Module d'un nombre complexe)

Soit $z \in \mathbb{C}$. On définit le module de z, noté $|z|$ par

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$$

Si on note M le point d'affixe z, alors :

$$OM = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = |z|$$

Si A et B sont deux points de $\mathcal{P}$ d'affixes respectifs z_A et z_B, alors :

$$AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = |z_B - z_A|$$

2 Lien entre module et les parties réel et imaginaire.

Proposition 9

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a les propriétés suivantes :

- $|z| \geqslant 0$ et $|z| = 0 \iff z = 0$.
- $\mathrm{Re}(z) \leqslant |z|$ et $\mathrm{Re}(z) = |z| \iff z \in \mathbb{R}_+$.
- $\mathrm{Im}(z) \leqslant |z|$ et $\mathrm{Im}(z) = |z| \iff z \in i\mathbb{R}_+$.
- $|z| = |\bar{z}|$.
- $|\lambda z| = |\lambda|\,|z|$.
- $|z|^2 = z\bar{z}$ et, si $z \neq 0$, $\bar{z} = \frac{|z|^2}{z}$, $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$. En particulier, si $|z| = 1$ on a $\frac{1}{z} = \bar{z}$.
- $|zz'| = |z|\,|z'|$ et, si $z' \neq 0$, $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$.

- On a de nouveau l'inégalité triangulaire
$$|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$$
et $|z + z'| = |z| + |z'|$ si et seulement si $zz' = 0$ ou s'il s'il existe $\mu \in \mathbb{R}_+$ tel que $z' = \mu z$.
- On a également
$$\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z - z'|$$

Proposition 10

Soit $(z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, on a

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

II Nombres complexes : géométrie et Trigonométrie

A Le plan complexe $\mathcal{P}$

Considérons le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On note $\vec{\mathcal{P}}$ l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{P}$. Au nombre complexe $z = a + ib$ on va associer, selon la situation, le point M défini par $O\vec{M} = a\vec{u} + b\vec{v}$ ou le vecteur $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

Définition 2

On appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O et de rayon 1, c'est-à-dire l'ensemble

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P} \;,\; OM = 1\}$$

B Forme trigonométrique

Définition 3

Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ et soit M l'image ponctuelle de z.

On appelle **argument** de z toute mesure θ de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}})$. On la note $\theta = \arg(z)$.

La mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}})$ comprise dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$ est appelée la détermination principale de l'argument de z.

Définition 4

Soit $M \in \mathcal{P}$ tel que $OM = 1$ et soit θ une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}})$.
On appelle alors $\cos(\theta)$ l'abscisse du point M dans le repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et $\sin(\theta)$ l'ordonnée du point M dans le repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

$\cos(\theta$ et $\sin(\theta)$ ne dépendent que de M et pas de la mesure choisie pour l'angle $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}})$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a

$$\cos(\theta + 2k\pi) = \cos(\theta) \qquad \sin(\theta + 2k\pi) = \sin(\theta)$$

Proposition 11

Soit $M \in \mathcal{P}$ et soit θ une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}})$. L'abscisse du point M dans le repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est alors $OM\cos(\theta)$ et l'ordonnée du point M dans le repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est $OM\sin(\theta)$.

Proposition 12

Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Soit $\rho = |z|$ et θ une détermination de l'argument de z. On a alors

$$z = \rho\cos(\theta) + i\rho\sin(\theta)$$

On appelle cette écriture la forme trigonométrique de z.
On a alors

$$\mathrm{Re}(z) = |z|\cos(\theta) \qquad \mathrm{Im}(z) = |z|\sin(\theta)$$

Théorème 13

Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes non-nuls de modules respectifs ρ_1 et ρ_2. Soit θ_1 et θ_2 deux déterminations des arguments respectifs de z_1 et z_2. Alors $z_1 = z_2$ si et seulement si $\rho_1 = \rho_2$ et θ_1 et θ_2 sont égaux modulo π. C'est-à-dire

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad \rho_1 = \rho_2 \text{ et } \theta_2 - \theta_1 \in 2\pi\mathbb{Z}$$

Théorème 14

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a alors

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

Théorème 15 (multiplication des nombres complexes sous forme trigonométrique)

Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes non-nuls de forme trigonométrique respective

$$z_1 = \rho_1(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)) \qquad z_2 = \rho_2(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2))$$

On a alors

$$z_1z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$$

C Exponentielle complexe

Ces propriétés vis-à-vis de la multiplication (schématiquement $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$) nous rappelle les propriétés de la fonction exponentielle (si on veut vraiment être précis l'argument est similaire à un morphisme continu du groupe $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{R}^*, \times)$ et on connait exactement tous ces morphismes). Ceci nous conduit à la définition suivante

Définition 5 (Écriture exponentielle)

Soit $x \in \mathbb{R}$, on définit

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

Si $z \in \mathbb{C}^*$ a pour **module** ρ et pour **argument** θ on a alors

$$z = \rho e^{i\theta}$$

On appelle cette écriture l'**écriture exponentielle** du nombre complexe z

Définition 6 (Exponentielle complexe)

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = a + ib$. On définit alors e^z par

$$e^z = e^a \times e^{ib}$$

Proposition 16

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}$, on a alors

$$e^{i(a+b)} = e^{ia} \times e^{ib}$$

Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, on a alors

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \times e^{z_2}$$

Proposition 17 (Formule de Moivre)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

On peut utiliser cette formule pour exprimer $\cos(n\theta)$ ou $\sin(n\theta)$ sous forme d'un polynôme en $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$, c'est-à-dire sous forme de somme de puissances de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

Proposition 18 (Récapitulatif)

Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes non-nuls. Soit θ_1 un argument de z_1 et θ_2 un argument de z_2. Alors

- $\theta_1 + \theta_2$ est un argument de $z_1 z_2$.
- $\pi + \theta_1$ est un argument de $-z_1$.
- $-\theta_1$ est un argument de $\bar{z_1}$ et de $\frac{1}{z_1}$
- $\theta_1 - \theta_2$ est un argument de $\frac{z_1}{z_2}$
- Pour $n \in \mathbb{Z}$, $n\theta_1$ est un argument de z_1^n.

Proposition 19 (Formule d'Euler)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

D Formules de trigonométrie

On va récapituler dans cette partie des formules de trigonométrie (i.e. faisant intervenir cos, sin et tan) qu'il faudra connaître et/ou savoir retrouver rapidement

Proposition 20

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on a

- $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ et $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$.
- $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\theta)$ et $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\theta)$
- $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\theta)$ et $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(\theta)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta)$
- $\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta)$ et $\sin(\theta + \pi) = -\sin(\theta)$
- $\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1$

Si $\cos(\theta) \neq 0$, c'est-à-dire si $\theta \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ on définit la tangente de θ par

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

On peut lire graphiquement la valeur de la tangente :
On a de plus

- $\tan(-\theta) = -\tan(\theta)$
- $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan(\theta)}$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan(\theta)}$
- $\tan(\theta + \pi) = \tan(\theta)$
- $1 + \tan(\theta)^2 = \frac{1}{\cos^2(x)}$

Théorème 21

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a alors

- $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$

Et, si $\tan(a), \tan(b)$ et $\tan(a + b)$ sont bien définis, alors $\tan(a + b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$

En particulier, pour $\theta \in \mathbb{R}$ on a :

- $\cos(2\theta) = \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2 = 2\cos(\theta)^2 - 1 = 1 - 2\sin(\theta)^2$
- $\sin(2\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta)$

Si $\tan(2\theta)$ et $\tan(\theta)$ sont bien définis, alors : $\tan(2\theta) = \dfrac{2\tan(\theta)}{1 - \tan(\theta)^2}$

Proposition 22

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a + b) + \cos(a - b)\right)$$
$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\sin(a + b) + \sin(a - b)\right)$$
$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a - b) - \cos(a + b)\right)$$

Proposition 23

Soit $(p, q) \in \mathbb{R}^2$, on a

- $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$
- $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$
- $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$
- $\sin(p) + \sin(q) = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$

E Géométrie des nombres complexes

Proposition 24 (Milieu, angles, alignement)

Soit A, B, C trois points de$\mathcal{P}$ d'affixes respectives z_A, z_B et z_C. Alors

- L'affixe du milieu I du segment $[AB]$ est $\dfrac{z_A + z_B}{2}$
- Si A, B et C sont trois points distincts alors $\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}$ est une détermination de l'argument de $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$
- A, B et C sont alignés si et seulement si $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$.

Proposition 25

Translations Soit $\overrightarrow{a} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ un vecteur de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ d'affixe $z_{\vec{a}}$ et soit $t_{\vec{a}} : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ la translation de vecteur $\vec{a}$.
Soit M un point de $\mathcal{P}$ d'affixe z_M. Alors l'affixe de $t_{\vec{a}}(M)$ l'image de M par la translation de vecteur $\vec{a}$ est $z_M + z_A$

Proposition 26 (Homothétie)

Soit $C \in \mathcal{P}$ d'affixe z_C et soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $h_{C,\lambda}$ l'homothétie de centre C et de rapport λ.
Soit M un point de $\mathcal{P}$ d'affixe z_M, alors l'affixe de $h_{C,\lambda}(M)$ l'image de M par l'homothétie de centre C et de rapport λ est $z_C + \lambda(z_M - z_C)$

Proposition 27 (Rotation)

Soit $C \in \mathcal{P}$ d'affixe z_C et soit $\theta \in [0, 2\pi[$. Soit $r_{C,\theta}$ la rotation de centre C et d'angle θ dans le sens direct.
Soit M un point de $\mathcal{P}$ d'affixe z_M, alors l'affixe de $r_{C,\theta}(M)$ l'image de M par la rotation de centre C et d'angle θ dans le sens direct est $z_C + e^{i\theta}(z_M - z_C)$

Proposition 28 (Symétries)

Soit $\theta \in [0, 2\pi[$ et soit s_θ la symétrie d'axe la droite dirigée par $\cos(\theta)\vec{u} + \sin(\theta)\vec{v}$ c'est-à-dire la droite faisant un angle θ avec l'axe $(O, \vec{u})$.
Soit M un point de $\mathcal{P}$ d'affixe z_M, alors l'affixe de $s_\theta(M)$ est $e^{i\theta}e^{-i\bar{\theta}}z_M = e^{2i\theta}\bar{z_M}$
En particulier, l'affixe de l'image de M par la symétrie d'axe l'axe $(O, \vec{u})$ est $\bar{z_M}$

III Équations d'inconnue complexe, Équations trigonométriques

Théorème 29

Soit $a \in \mathbb{C}$ de forme exponentielle $\rho_a e^{i\theta_a}$. L'équation $z^2 = a$ admet deux solutions sur $\mathbb{C}$ qui sont

$$\sqrt{\rho_a}e^{i\frac{\theta_a}{2}} \qquad \text{et } \sqrt{\rho_a}e^{i\frac{\theta_a}{2}+\pi} = -\sqrt{\rho_a}e^{i\frac{\theta_a}{2}}$$

Théorème 30

Racines n-ièmes de l'unité Soit $n \in \mathbb{N}$, l'équation $z^n = 1$ admet n solutions sur $\mathbb{C}$ appelées racines n-ièmes de l'unité. L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}\ ,\ k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$$

En notant $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ on a

$$\mathbb{U}_n = \left\{ \omega^k\ ,\ k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$$

Proposition 31

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$. L'équation $z^n = a$ admet sur $\mathbb{C}$ n solutions distinctes qui sont

$$\mathcal{S}_a = \left\{a^{\frac{1}{n}} e^{\frac{2ik\pi}{n}}\ ,\ k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$$

On peut généraliser aux équations de la forme $z^n = a$ avec $a \in \mathbb{C}$.

Proposition 32

Soit $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha^n = a$. L'équation $z^n = a$ admet sur $\mathbb{C}$ n solutions qui sont

$$\mathcal{S}_a = \left\{\alpha e^{\frac{2ik\pi}{n}}\ ,\ k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$$

IV Méthodes

Méthode 1

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, exprimons $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$ sous forme d'un polynôme en $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

$$\begin{aligned}
\cos(3\theta) + i\sin(3\theta) &= (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^3 \\
&= \cos(\theta)^3 + 3i\cos(\theta)^2\sin(\theta) - 3\cos(\theta)\sin(\theta)^2 - i\sin(\theta)^3 \\
&= \left(\cos(\theta)^3 - 3\cos(\theta)\sin(\theta)^2\right) + i\left(3\cos(\theta)^2\sin(\theta) - \sin(\theta)^3\right) \\
&= \left(\cos(\theta)^3 - 3\cos(\theta)(1-\cos(\theta)^2)\right) + i\left(3(1-\sin(\theta)^2)\sin(\theta) - \sin(\theta)^3\right) \\
&= \left(4\cos(\theta)^3 - 3\cos(\theta)\right) + i\left(3\sin(\theta) - 4\sin(\theta)^3\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, par identification des parties réelles et imaginaires on a

$$\cos(3\theta) = 4\cos(\theta)^3 - 3\cos(\theta) \qquad \text{et} \qquad \sin(3\theta) = 3\sin(\theta) - 4\sin(\theta)^3$$

Méthode 2

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, linéarisons $\cos(\theta)^3$

$$\cos(\theta)^3 = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^3 = \frac{e^{3i\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} + e^{-3i\theta}}{8} = \frac{e^{3i\theta} + e^{-3i\theta} + 3\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)}{8} = \frac{\cos(3\theta) + 3\cos(\theta)}{4}$$

Méthode 3

Soit A, B, C et D trois points d'affixe respectives $1+i$, $5+2i$, $3+3i$, $-1+2i$. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?
Soit I le milieu de $[AC]$ l'affixe de I est $\frac{1+i+3+3i}{2} = 2+2i$. De même l'affixe du milieu J de $[BD]$ est $\frac{5+2i-1+2i}{2} = 2+2i$.
Ainsi $I = J$, les diagonales du quadrilatère $ABCD$ Se coupent en leur milieu, $ABCD$ est donc un parallélogramme.
De plus on a $AB = |(5+2i) - (1+i)| = |4+i| = \sqrt{17}$ et $BC = |(3+3i) - (5+2i)| = |-2+i| = \sqrt{5}$. Comme $AB \neq BC$, $ABCD$ n'est pas un losange.
Enfin on a $AC = |2+2i| = \sqrt{8}$ et $BD = |-6| = 6$. Comme $AC \neq BD$, $ABCD$ n'est pas un rectangle.

Méthode 4

Soit $\theta \in [0, 2\pi[$ et soit D_1 la droite dirigé par le vecteur $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{u} + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{v}$ et D_2 la droite dirigé par le vecteur $\cos(\theta)\vec{u}+\sin(\theta)\vec{v}$ On effectue successivement la symétrie s_1 d'axe D_1 puis la symétrie s_2 d'axe D_2, quelle transformation a-t-on fait au final ?
Soit $M \in \mathcal{P}$ d'affixe z. L'affixe de $s_1(M)$ est $e^{i\theta}\bar{z}$, l'affixe de $s_2(s_1(M))$ est alors

$$e^{2i\theta}\overline{e^{i\theta}}\bar{z} = e^{i\theta} z$$

On reconnait l'affixe de l'image de M par la rotation de centre O et d'angle θ. Ainsi la composée de la symétrie s_1 d'axe D_1 et de la symétrie s_2 d'axe D_2 est la rotation de centre O et d'angle θ.

Méthode 5

Résolvons les équations $z^2 = i$, $z^2 = \sqrt{3} + 3i$ et $z^2 = 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i$

- $z^2 = i$
  On a $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ainsi les solutions de l'équation $z^2 = i$ sont $e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ et $-e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$.
- $z^2 = \sqrt{3} + 3i$
  On a $|\sqrt{3} + 3i| = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, ainsi $\sqrt{3} + 3i = 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$. Les solutions de l'équation $z^2 = \sqrt{3} + 3i$ sont alors $12^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $-12^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\pi}{6}}$.
- $z^2 = 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i$
  On a $|3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i| = \sqrt{18+18} = 6$, ainsi $3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i = 6\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) = 6e^{i\frac{3\pi}{4}}$. Les solutions de l'équation $z^2 = 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2}i$ sont alors $\sqrt{6}e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\sqrt{3} + i\sqrt{3}$ et $-\sqrt{6}e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{3} - i\sqrt{3}$.

Méthode 6 (tiré du Baccalauréat C Bordeaux 1981)

Calculer $\left(\frac{1}{2} + i\sqrt{3}\right)^4$ et déterminer tous les nombres complexes z tels que $z^4 = \frac{73}{16} - \left(\frac{11}{2}\sqrt{3}\right)i$

$$\left(\frac{1}{2} + i\sqrt{3}\right)^4 = \frac{73}{16} - \left(\frac{11}{2}\sqrt{3}\right)i$$

Notons $z_0 = \frac{1}{2} + i\sqrt{3}$. Remarquons que $z_0 \neq 0$. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a

$$z^4 = \frac{73}{16} - \left(\frac{11}{2}\sqrt{3}\right)i \Leftrightarrow z^4 = z_0^4 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{z_0}\right)^4 = 1$$

On va alors résoudre l'équation $u^4 = 1$.
On a

$$u^4 = 1 \Leftrightarrow u^4 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (u^2-1)(u^2+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (u-1)(u+1)(u-i)(u+i) = 0$$

L'ensemble des solutions de l'équation $u^4 = 1$ est

$$\{1, -1, i, -i\}$$

On sait que $z^4 = \frac{73}{16} - \left(\frac{11}{2}\sqrt{3}\right)i$ si et seulement si $\left(\frac{z}{z_0}\right)^4 = 1$
Ainsi $z^4 = \frac{73}{16} - \left(\frac{11}{2}\sqrt{3}\right)i$ si et seulement si $\frac{z}{z_0} \in \{1, -1, i, -i\}$
L'ensemble des solutions de l'équation $z^4 = \frac{73}{16} - \left(\frac{11}{2}\sqrt{3}\right)i$ est donc

$$\left\{\frac{1}{2} + i\sqrt{3}, -\frac{1}{2} - i\sqrt{3}, -\sqrt{3} + \frac{i}{2}, \sqrt{3} - \frac{i}{2}\right\}$$

Méthode 7

- $\mathbb{U}_2 = \{1, -1\}$
- $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\mathbb{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$