Chapitre 8 : Orthogonalité et distance dans l'espace.

I Produit scalaire dans l'espace

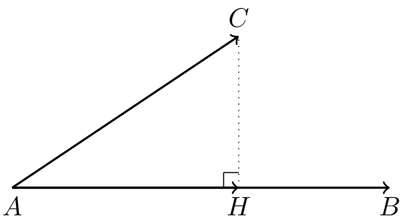
A Expression géométrique.

Définition 1

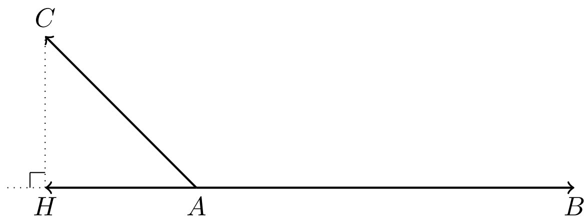
Soit A, B et C trois points de l'espace (A et B distincts). On se place dans le plan $\mathscr{P}$ contenant ces trois points. Soit H l'intersection de la droite (AB) de la perpendiculaire à la droite (AB) passant par C. Le point H est appelé le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). Dés lors le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ avec $\overrightarrow{AC}$ est définie par :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH} = \begin{cases} AB \times AH & \text{si } \overline{AB} \text{ et } \overline{AH} \text{ de même signe.} \\ -AB \times AH & \text{si } \overline{AB} \text{ et } \overline{AH} \text{ de signe différent.} \end{cases}$$

si $\overline{AB}$ et $\overline{AH}$ de même signe.



si $\overline{AB}$ et $\overline{AH}$ de signe différent.



Si l'on a $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ deux vecteurs du plan, alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$. Si l'on a $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ deux vecteurs du plan, alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
On a donc $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$

Remarque 1. Si l'angle $\widehat{BAC}$ est obtus : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \leqslant 0$.

Remarque 2. Si l'angle $\widehat{BAC}$ est droit : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

Vidéo 1

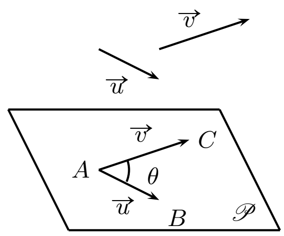
Exemple de calculs.

Ex 1 à 3 et 6 page 360

B Expression dans le triangle.

Proposition 1

Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs non nuls de l'espace alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = AB \times AC \times \cos\theta$ avec $\theta = \widehat{BAC}$.



Démonstration 1. Si l'on considère la configuration de la définition 1, et le triangle rectangle en H, AHC. En utilisant la la formule $\cos(\widehat{HAC}) = \dfrac{AH}{AC}$ si l'angle est aigu et l'opposé si l'on est obtus, on obtient la formule précédente puisque $\|\overrightarrow{v}\| = AH$.

Vidéo 2

Exemple de calcul.

4 page 360

C Propriétés algébriques du produit scalaire.

Proposition 2 (Propriétés algébriques du produit scalaire et conséquences)

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs du plan et λ et μ deux réels. On a :

- Alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2 \geqslant 0$ avec égalité si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ **(positive et définie)**
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$ **(Symétrie)**
- $\overrightarrow{u} \cdot (\lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{w}) = \lambda\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$ donc $(\lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{w}) \cdot \overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u}$ **(Bilinéarité)**

D'où les identités remarquables :

- $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 + 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2$
- $(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 - 2\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2$
- $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}^2 - \overrightarrow{v}^2$

Ex 5 et 6 page 360

D Formules de polarisation.

Proposition 3

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace, le produit scalaire $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ est donné par les formules de polarisation :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2\right) = \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{u}||^2 + ||\overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}||^2\right) = \frac{1}{4}\left(|\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}||^2\right)$$

Vidéo 3

Premier exemple de calcul.

Ex 8 à 10 page 360

E Norme et produit scalaire.

Proposition 4

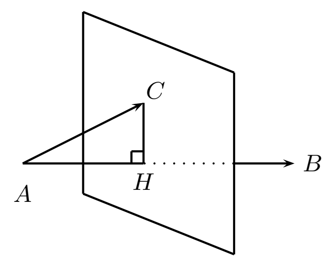
Soit un vecteur $\overrightarrow{u}$ de l'espace, alors : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = ||\overrightarrow{u}||^2$

F Configuration

Proposition 5

Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs de l'espace et si H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB) alors

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$$



Remarque : Si K est le projeté orthogonal de B sur la droite (AC), on a aussi : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AK}$

G Expression analytique

Proposition 6

Dans un repère orthonormé de l'espace, si $\overrightarrow{u}(x;y;z)$ et $\overrightarrow{v}(x';y';z')$ sont deux vecteurs, alors

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$$

Corolaire 7

Dans un repère orthonormé de l'espace, si $\overrightarrow{u}(x;y;z)$ alors : $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
Donc si $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ alors : $AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

Vidéo 4

Exemple d'utilisation des coordonnées pour effectuer des calculs de produit scalaire.

Exercice 23 à 28 page 362

II Orthogonalité dans l'espace

A Orthogonalité de deux droites

Définition 2

Dire que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **orthogonaux** signifie que $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$

Proposition 8

Deux droites d et d' de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont orthogonales si, et seulement si, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ sont orthogonaux. C'est deux droites d et d' seront dites perpendiculaires si elles sont orthogonales et sécantes.

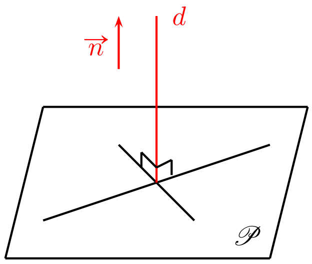
B Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Proposition 9

Soit d est une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et $\mathscr{P}$ est le plan dirigé par un couple $(\overrightarrow{v};\overrightarrow{w})$ (donc non colinéaires)

- La droite d et le plan $\mathscr{P}$ sont **orthogonaux** si, et seulement si, quels que soient les points M et N de $\mathscr{P}$, on a : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{MN} = 0$.
- La droite d et le plan $\mathscr{P}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$ et $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} = 0$.

C Vecteur normal à un plan - Plans perpendiculaires



Définition 3

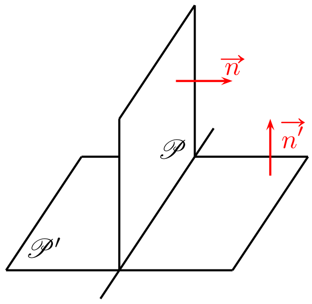
Dire qu'un vecteur $\overrightarrow{n}$ non nul est **normal** à un plan $\mathscr{P}$ signifie que toute droite de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$ est orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

Proposition 10

Soit A un point de l'espace et $\overrightarrow{n}$ un vecteur non nul.
L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$ est le plan $\mathscr{P}$ passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

Définition 4

Soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans de vecteurs normaux $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$.
Dire que les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont **perpendiculaires** signifie que $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n'} = 0$.



Vidéo 5

Déterminer un vecteur normal à un plan : Exemple 1 et Exemple 2.

D Positions relatives d'une droite et d'un plan.

Proposition 11

Soient d une droite de l'espace de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et $\mathscr{P}$ un plan de l'espace de vecteur normal $\overrightarrow{n}$. Alors

- Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux et donc $d \mathbin{//} \mathscr{P}$ et alors :
  - Soit $d \subset \mathscr{P}$
  - Soit $d \cap \mathscr{P} = \varnothing$
- Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ sont non orthogonaux et donc d et $\mathscr{P}$ sont sécants. Dans ce cas, si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires si et seulement si d et $\mathscr{P}$ sont perpendiculaires.

Définition-Proposition 12

Soient A un point de l'espace et $\mathscr{P}$ un plan de l'espace. Alors il existe une unique droite d passant par A et perpendiculaire à $\mathscr{P}$ et alors l'intersection H entre d et $\mathscr{P}$ est appelé le **le projeté orthogonal** de A sur $\mathscr{P}$.

Ex 14 à 20 page 361

E Positions relatives de deux plans.

Proposition 13

Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans de l'espace de vecteur normal respectivement $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$. Alors

- Soit $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires et donc $\mathscr{P} \mathbin{//} \mathscr{P}'$ et alors :
  - Soit $\mathscr{P}' = \mathscr{P}$
  - Soit $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' = \varnothing$
- Soit $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont non colinéaires et donc $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants et $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}'$ est une droite. Si $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont orthogonaux alors les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont perpendiculaires.

Vidéo 6

Déterminer l'intersection de deux plans
Démontrer que deux plans sont perpendiculaires