Chapitre 8 : Orthogonalité et distance dans l'espace.

I Produit scalaire dans l'espace

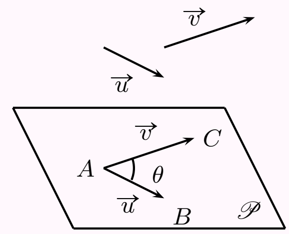
Définition-Proposition 1

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace, le produit scalaire $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ est le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ramené *au* plan vectoriel contenant $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. On peut définir le produit scalaire comme dans le plan par :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} &= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}\|^2+\|\overrightarrow{v}\|^2-||\overrightarrow{v}-\overrightarrow{u}||^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}||^2-\|\overrightarrow{u}\|^2-\|\overrightarrow{v}\|^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(||\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}||^2-||\overrightarrow{v}-\overrightarrow{u}||^2\right)\end{aligned} \qquad \text{donc} \quad \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = ||\overrightarrow{u}||^2$$

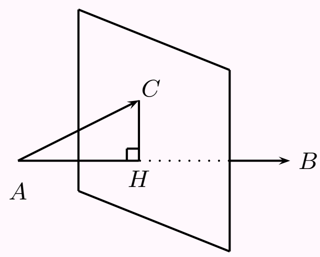
Proposition 2 (Configuration)

Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs non nuls de l'espace alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = AB \times AC \times \cos\theta$ avec $\theta = \widehat{BAC}$.



Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs de l'espace et si H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB) alors

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$$



Proposition 3 (Propriétés algébriques du produit scalaire et conséquences)

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs du plan et λ et μ deux réels. On a :

- Alors $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2 \geqslant 0$ avec égalité si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$
- $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}$
- $\overrightarrow{u}\cdot(\lambda\overrightarrow{v}+\mu\overrightarrow{w}) = \lambda\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\mu\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}$ donc $(\lambda\overrightarrow{v}+\mu\overrightarrow{w})\cdot\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}+\mu\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{u}$

D'où les identités remarquables :

- $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2+2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}^2$
- $(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2-2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}^2$
- $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}^2-\overrightarrow{v}^2$

II Position relative et orthogonalité dans l'espace.

Voir chapitre 4, chapitre 10 du livre et les pages 346 et 348 du livre.

III Orthogonalité et distance

Définition 1

Une base orthonormé de l'espace est une base de l'espace (trois vecteurs non coplanaires) formé de vecteurs deux à deux orthogonaux et de norme 1.
Autrement dit $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{j}\right)$ est une base orthonormée signifie :

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{i}\cdot\vec{k}=0 \qquad \text{et} \qquad \|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=\left\|\vec{k}\right\|=1$$

Et avec ces conditions et O un point de l'espace le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{j}\right)$ sera appelé un repère orthonormé de l'espace.

Proposition 4 (Expression analytique du produit scalaire)

Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{j}\right)$ de l'espace , si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs, alors

$$\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz' \qquad \text{et} \qquad \|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Et si $A(x_A,y_A,z_A)$ et $B(x_B,y_B,z_B)$ alors $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

Définition-Proposition 5 (Distance d'un point à un plan)

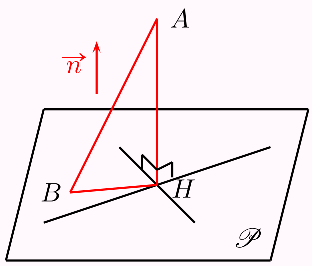
Soient A un point de l'espace, $\mathscr{P}$ un plan, $\vec{n}$ un vecteur normal de $\mathscr{P}$ et B un point de $\mathscr{P}$.

- Le projeté orthogonal de A est le point H de $\mathscr{P}$ tel que $\overrightarrow{AH}$ soit normal à $\mathscr{P}$.
- Le point H est alors le point le "*plus proche*" de A.
- La distance AH est appelée **distance du point A au plan** $\mathscr{P}$, et alors :

$$AH=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}$$

Si $\mathscr{P}$ à pour équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$, alors :

$$AH=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$



Définition-Proposition 6 (Distance d'un point à une droite)

Soient A un point de l'espace, d une droite de l'espace, $\vec{u}$ un vecteur directeur de la droite d et B un point de d.

- Le projeté orthogonal de A sur d est le point H de d tel que les droites (AH) et d soient perpendiculaires (c'est à dire que H est l'intersection entre le plan orthogonale à d passant pas A et la droite d)
- Le point H ainsi défini est le point de la droite d le "*plus proche*" de A.
- La distance AH est appelée **distance du point A à la droite** d, et on a :

$$AH=\left\|\overrightarrow{AB}-\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}\right\|$$