Chapitre 8 résumé : Systèmes linéaires.

Nous allons procéder en suivant un système linéaire *classique* :

$$\begin{cases} y+3z+2t=a \\ x+3z+2t=b \\ 3x+2y-z-2t=c \\ 2x+y+z=d \\ 3x+y-4z-4t=e \end{cases} \quad \text{matrice associée} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -4 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{pour} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 17 \\ 15 \\ -1 \\ 7 \\ -18 \end{pmatrix} \quad \text{soit} B_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Méthode 1 (Opérations sur les lignes :)

- la **permutation** des lignes i et j correspond à l'échange des lignes i et j dans le système. On note $L_i \longleftrightarrow L_j$.
- la **dilatation** de la ligne i de rapport $\lambda \neq 0$ correspond à la multiplication de la ligne i par λ. On note $L_i \leftarrow \lambda L_i$
- la **transvection** entre les lignes i et j de rapport λ correspond à l'ajout à la ligne i de la ligne j multipliée par λ. On note $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

Définition-Proposition 1 (Systèmes équivalents.)

Étant donné un système linéaire (S), tout système (S') qui peut être obtenu à partir de (S) avec un nombre fini d'opérations élémentaires sur les lignes est équivalent à (S).
On obtient la même définition pour les matrices bien sûr.

Définition 1 (Définition d'une matrice échelonnée en lignes)

On appelle **matrice échelonnée en lignes**, toute matrice telle que :

- Si une ligne est nulle, les suivantes le sont aussi
- à partir de la deuxième ligne, le premier coefficient non nul de chaque ligne est strictement à droite de celui de la ligne précédente.

Définition-Proposition 2

Si la **matrice est échelonnée en lignes**,

- on appelle **pivot**, le premier coefficient non nul de chaque ligne,
- les inconnues correspondant aux pivots sont les **inconnues principales** du système,
- les autres inconnues sont les **inconnues secondaires** ou **paramètres** du système.

Toute matrice est équivalente à une matrice échelonnée.

Si l'on reprend la matrice précédente, après opération sur les lignes, on obtient la **matrice échelonnée** équivalente (on remarquera donc ici que le système ou la matrice sont de rang 3) :

($L_1 \longleftrightarrow L_2$, $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$,$L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1$, $L_5 \leftarrow L_5 - 3L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$, $L_4 - L_2$, $L_5 \leftarrow L_5 - L_2$, $L_4 \leftarrow L_4 - \frac{1}{2}L_3$, $L_5 \leftarrow L_5 - L_3$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -16 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{res 1} \quad \begin{pmatrix} 15 \\ 17 \\ -80 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{res 2} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -28 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Les inconnues principales sont x, y et z. L'inconnue secondaire (une ici) c'est-à-dire le paramètre est t. **Attention :** Ici on peut déjà affirmer qu'il y a une infinité de solution pour B_1 et aucune pour B_2.

Définition-Proposition 3 (Rang d'un système ou d'une matrice)

On appelle **rang** du système ou de la matrice associée, le nombre de pivot d'une matrice échelonnée équivalente. (Ce nombre est unique !)

Définition-Proposition 4

Une matrice échelonnée **réduite** en ligne est une matrice échelonnée en ligne telle que :

- les pivots valent 1
- les pivots sont les seuls coefficients non nuls de leur colonne.

Toute matrice est équivalente à une matrice échelonnée.

Si l'on reprend la matrice précédente, après opération sur les lignes, on obtient la **matrice échelonnée** équivalente :

($L_3 \leftarrow -\frac{1}{16}L_3$,$L_2 \leftarrow -3L_3$, $L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{res 1} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{res 2} \begin{pmatrix} -0,25 \\ 1,75 \\ 1,75 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Maintenant, si l'on traduit les résultats précédents avec les variables avec l'exemple B_1 (pour B_2 pas de solution puisque $0 = 6$), on obtient :

$$\begin{cases} x - \frac{1}{4}t = 0 \\ y - \dfrac{1}{4}t = 2 \\ z + \frac{3}{4}t = 5 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{1}{4}t \\ y = 2 + \frac{1}{4}t \\ z = 5 - \frac{3}{4}t \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{-3}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$$

L'ensemble solution est : $S = \left\{ \left(\dfrac{1}{4}t; 2 + \dfrac{1}{4}t; 5 - \dfrac{3}{4}t; t \right) \in \mathbb{R}^4, t \in \mathbb{R} \right\}$

Définition 2 (Compatible et incompatible.)

Un système qui admet des solutions est dit **compatible.** Dans le cas contraire, il est dit **incompatible**.

Ici pour B_1 le système est compatible et pour B_2 le système est dit incompatible.

Méthode 2 (Algorithme du Pivot.)

On effectue successivement les opérations sur les lignes :

1. Échange éventuel de deux lignes pour mettre en première ligne celle qui a le moins de zéros au début, (permutation)
2. Multiplication de cette ligne par l'inverse de son premier coefficient non nul, (dilatation)
3. Annulation des autres coefficients de la colonne avec des matrices de transvection à partir de cette ligne.
4. On recommence cet algorithme sur la sous-matrice à laquelle on enlève les premières colonnes déjà traitées.

On obtient une matrice échelonnée réduite après un nombre fini d'opérations.

Proposition 5 (Nombres de solution)

Un système admet soit aucune, soit 1, soit une infinité de solutions.

Méthode 3 (Pour résoudre un système)

1. Commencer par obtenir une matrice échelonnée en utilisant les opérations sur les lignes (soit avec l'algorithme du Pivot, soit d'autres astuces plus rapides)
2. Dès lors, il est possible de savoir si le système est compatible ou incompatible en regardant les lignes en dessous du dernier pivot.
3. Si le système est compatible, continuer les opérations jusqu'à une matrice échelonnée réduite.
4. En déduire l'ensemble solution.

A savoir :

- Déterminer le rang d'un système.
- Lorsque l'on a obtenu le système échelonné, savoir s'il est compatible (avec des solution(s)) ou incompatible (aucune solution).
- Lorsque l'on a obtenu le système échelonné, savoir déterminer les variables principales et les paramètres.
- Lorsque l'on a obtenu le système échelonné **réduit**, savoir donner l'ensemble solution.

Si l'on veut résoudre le système avec B quelconque. On peut voir les variables a, b, c, d et e comme on le fait pour x, y, z et t.

Le système de départ s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -4 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour obtenir la matrice échelonnée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -16 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour obtenir la matrice échelonnée réduite :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -3/8 & 7/16 & 3/16 & 0 & 0 \\ 5/8 & -9/16 & 3/16 & 0 & 0 \\ 1/8 & 3/16 & -1/16 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut le traduire par :

$$\begin{cases} x - \frac{1}{4}t = \frac{-3}{8}a + \frac{7}{16}b + \frac{3}{16}c \\ y - \dfrac{1}{4}t = \frac{5}{8}a - \frac{9}{16}b + \frac{3}{16}c \\ z + \frac{3}{4}t = \frac{1}{8} + \frac{3}{16}b - \frac{1}{16}c \\ 0 = -\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c + d \\ 0 = a - c \end{cases}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que le système admette une solution est :

$$\begin{cases} 0 = -\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c + d \\ 0 = a - c \end{cases}$$

D'autre exemple :

Exemple 1.

$$\begin{cases} y+3z=9 \\ x+3z=7 \\ 3x+2y-z=7 \end{cases} \qquad \begin{matrix}\text{matrice} \\ \text{associée}\end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Après opération sur les lignes, on obtient le système échelonné réduit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ce système est de rang 3 avec 3 inconnues. Il existe une unique solution qui est $(1;3;2)$.

Point de vue géométrique : On est un présence de l'intersection de 3 plans. Ici l'intersection est réduite à un point.

Exemple 2. Si le système échelonné réduit est :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Le rang du système est 2 (car deux pivots). Les deux variables principales sont x et z. La variable secondaire (encore une seule ici) est y. La traduction avec les variables sont :

$$\begin{cases} x = 3-2y \\ z = 4 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'ensemble solution est : $S = \left\{(3-2y;y;4) \in \mathbb{R}^3 / y \in \mathbb{R}\right\}$ **Point de vue géométrique :** Ici on est en présente d'une droite de l'espace passant par le point de coordonnées $(3;0;4)$ et de vecteur directeur : $\bar{u} \ : \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Exemple 3. Pour le système échelonné réduit :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad S = \left\{(4-2y-3z;y;z) \in \mathbb{R}^3 / (y,z) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

C'est un plan passant par le point de coordonnées $(4;0;0)$ et de vecteurs directeurs $\bar{u}$: $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\bar{v}$: $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$