Chapitre 9 : Convexité.

I Continuité

Définition 1 (Continuité en un point et sur un segment)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Soit $a \in I$. On dit que f est **continue en** a lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- La fonction f est **continue sur** I si, pour tout réel a de I, f est continue en a.

Exemple 1. $\lfloor . \rfloor : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lfloor x \rfloor \end{array}$ où $\lfloor x \rfloor$ est l'entier relatif définie par $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$. Cette fonction est discontinue en tous points de $\mathbb{Z}$ mais continue sur $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$.

Théorème 1 (Théorèmes dit usuels)

- Toutes les fonctions de référence sont continues sur leur ensemble de définition, ainsi que les polynômes et les factions rationnelles.
- Les sommes, produits, quotients et composées de fonctions continues sont continues sur les intervalles formant leur ensemble de définition.

Proposition 2

Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I.

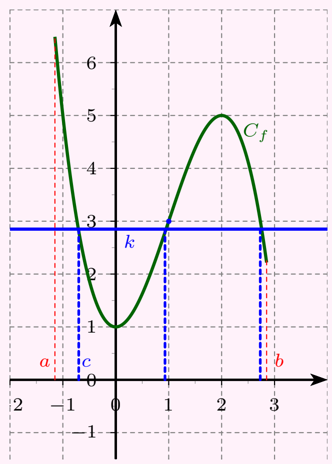
Proposition 3 (Définition séquentiel de la continuité)

Soit f une fonction définie sur I, $a \in I$ et E l'ensemble des suites d'éléments de I convergent vers a. Alors :

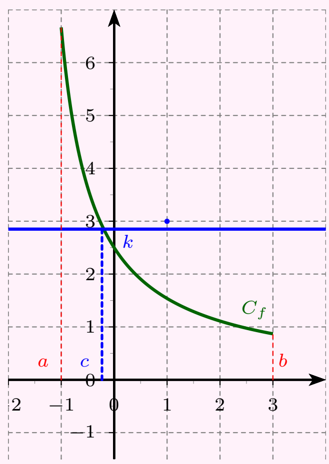
$$f \text{ continue en } a \Leftrightarrow \forall (u_n) \in E, (f(u_n)) \text{ converge vers } a$$

Théorème 4 (Théorème des valeurs intermédiaires)

On considère la fonction f définie et continue sur un intervalle $[a;b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.



Avec les hypothèses précédentes, si la fonction est strictement monotone, la solution c est unique.



Ces théorèmes s'étend au cas $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$ et f continue sur $]a, b[$ et admettant une limite en a et une limite en b. Dès lors k est compris entre $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to b} f(x)$

II Complément sur la dérivation : composition

Définition 2

Soit $u : E \rightarrow F$ et $v : F \rightarrow G$ deux fonctions réels définies respectivement sur E et F alors l'on définie la fonction composée de u par v sur E, notée $v \circ u$ par $v \circ u(x) = v\left(u(x)\right)$ pour tous $x \in E$.
Attention, on remarquera qu'il faut que u prenne des valeurs dans l'ensemble de définition de v.

Proposition 5

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et v une fonction dérivable sur un intervalle J vérifiant $u(I) \subset J$.
Alors la fonction $v \circ u$ est dérivable sur I et $(v \circ u)' = u' \times v' \circ u$
D'où le tableau :

Fonction	Dérivée
u^2	$2u'u$
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$
u^n $(n \in \mathbb{Z}^*)$	$nu'u^{n-1}$
$\dfrac{1}{u^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\dfrac{-nu'}{u^{n+1}}$
e^u	$u'\mathrm{e}^u$
$\ln(u)$	$u' \ln(u)$
$\sin(u)$	$u' \cos(u)$
$\cos(u)$	$-u' \sin(u)$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$u(v(x))$	$v'(x) \times u'(v(x))$

III Convexité d'une fonction

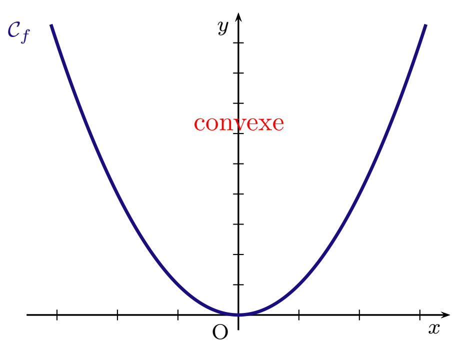
A Fonction convexe, fonction concave

Définition 3

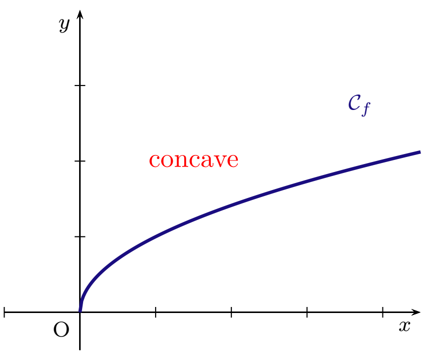
f est une fonction continue sur un intervalle I et $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère.

- Dire que f est **convexe** sur I signifie que sur I, la courbe $\mathscr{C}$ est entièrement **au-dessous** de chacune de ses cordes.
- Dire que f est **concave** sur I signifie que sur I, la courbe $\mathscr{C}$ est entièrement **au-dessus** de chacune de ses cordes.

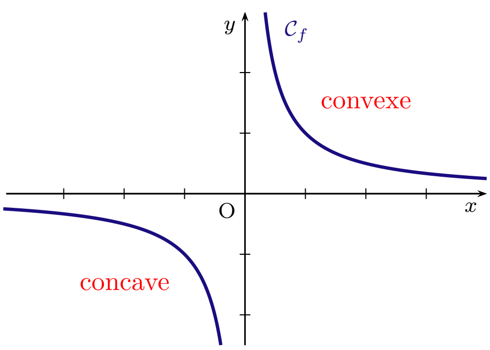
Exemple 2. Parmi les fonctions usuelles, on a :



La fonction carré $x \longmapsto x^2$ est convexe.



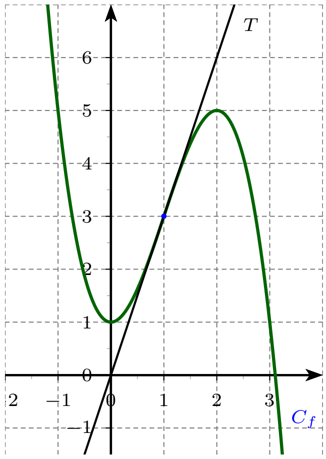
La fonction racine carrée $x \longmapsto \sqrt{x}$ est concave.



La fonction inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est concave sur $]-\infty; 0[$ et convexe sur $]0; +\infty[$

Définition 4 (Point d'inflexion)

Soient f est une fonction continue sur un intervalle I, $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère et $A(a, f(a))$ un point de $\mathscr{C}$ où f admet une tangente (c'est-à-dire que f est dérivable en a).
Le point A de $\mathscr{C}$ est **un point d'inflexion** de $\mathscr{C}$ si au point A la courbe $\mathscr{C}$ *traverse* sa tangente en A.



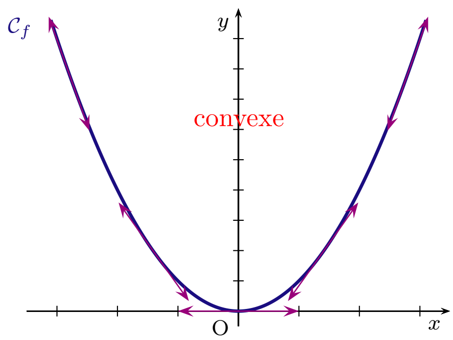
B Convexité d'une fonction dérivable

Définition 5

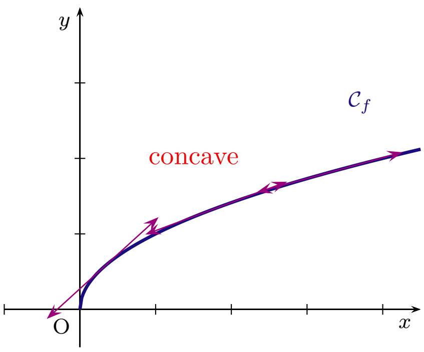
f est une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère.

- Dire que f est **convexe** sur I signifie que sur I, la courbe $\mathscr{C}$ est entièrement **au-dessus** de chacune de ses tangentes.
- Dire que f est **concave** sur I signifie que sur I, la courbe $\mathscr{C}$ est entièrement **au-dessous** de chacune de ses tangentes.

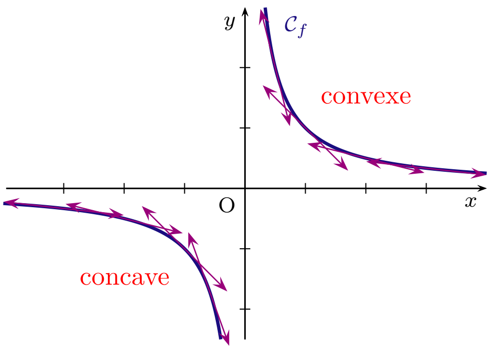
Exemple 3. Parmi les fonctions usuelles, on a :



La fonction carré $x \longmapsto x^2$ est convexe.



La fonction racine carrée $x \longmapsto \sqrt{x}$ est concave.



La fonction inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est concave sur $]-\infty; 0[$ et convexe sur $]0; +\infty[$

C Convexité d'une fonction et dérivée

1 Convexité et sens de variation de f'

Proposition 6

f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

- f est **convexe** sur I si, et seulement si, f' est **croissante** sur I.
- f est **concave** sur I si, et seulement si, f' est **décroissante** sur I

2 Convexité et signe de f''

Définition 6

f est une fonction dérivable sur un intervalle I.
Dire que f est **deux fois dérivable** sur I signifie que f' est elle-même dérivable sur I. La dérivée de f', notée f'', est appelée **dérivée seconde** de f.
On définie ainsi par itération une fonction k**-dérivable** et l'on notera la dérivée k-ième $f^{(k)}$.

Proposition 7

f est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

- f est convexe sur I si, et seulement si f'' est positive sur I.
- f est concave sur I si, et seulement si f'' est négative sur I.

3 Point d'inflexion et dérivée seconde

Proposition 8

f est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I. La courbe de f admet un point d'inflexion au point d'abscisse a si et seulement si f'' s'annule et change de signe en a.