Chapitre 9 : Résumé fonctions usuelles.

A Tableau récapitulatif : Formules usuelles.

Dérivées des fonctions usuelles

u	Dérivée u'	Sur
$k \in \mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\mathbb{R}^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^{+*}$

Opérations sur les dérivées

u et v désignent deux fonctions quelconques, définies et dérivables sur un intervalle I.

Fonction	Dérivée
$ku,\ k \in \mathbb{R}$	ku'
$u + v$	$u' + v'$
uv	$u'v + uv'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
u^2	$2u'u$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$u^n \ (n \in \mathbb{Z}^*)$	$nu'u^{n-1}$
$u \circ v(x))$	$v'(x) \times u' \circ v(x)$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
e^u	$u'e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\cos u$	$-u' \times \cos u$

B Fonctions exponentielles.

1 Définition.

Définition-Proposition 1

L'exponentielle est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $\exp(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}; \exp'(x) = \exp(x)$

On note : $\exp(x)$ ou e^x.

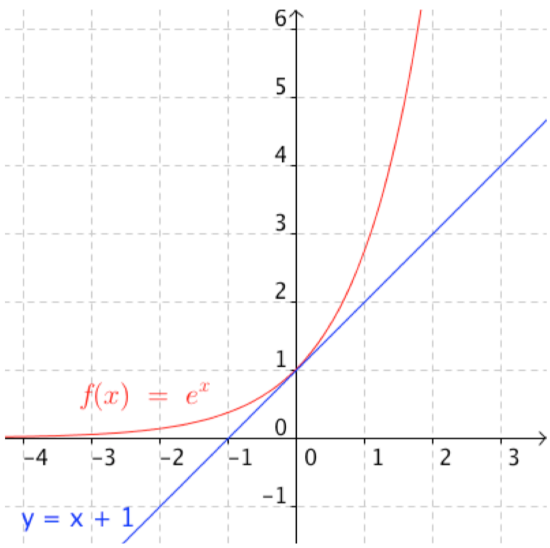
2 Étude de la fonction exponentielle.

Tableau de variation.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp(x)$		$+$	
$\exp(x)$	0	$\nearrow 1 \nearrow$	$+\infty$

On détermine la tangente à $\mathscr{C}_{exp}$ en utilisant la formule :

$$y = exp'(0)(x - 0) + exp(0) = x + 1$$



3 Propriétés algébriques et fonctionnelles.

Proposition 2

Pour tous x et y réels et $n \in \mathbb{Z}$

- $\exp(0) = 1$
- $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$
- $\exp(y-x) = \dfrac{\exp(y)}{\exp(x)}$
- $\exp(x)^y = exp(xy)$
- $\exp(nx) = (\exp(x))^n$

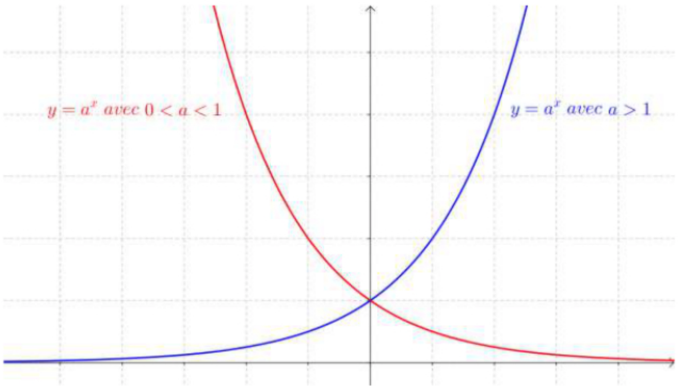
- $e^0 = 1$
- $e^{x+y} = e^x \times e^y$
- $e^{y-x} = \frac{e^y}{e^x}$
- $(e^x)^y = e^{xy}$
- $(e^{nx} = (e^x)^n$

4 Exponentielle en base a.

Définition-Proposition 3

Soit a un réel strictement positif. Pour tout réel x, on définit a^x par : $a^x = \mathrm{e}^{x \times \ln a}$.
A retenir que les formules sur les puissances entières restent vrai.

Si $f(x) = a^x = \mathrm{e}^{x \times \ln a}$ alors $f'(x) = \ln a a^x$. Comme $a^x > 0$, la dérivée $f'(x)$ est du signe de $\ln a$. Donc f est strictement croissante si $a > 1$ et strictement décroissante si $0 < a < 1$.



C Fonctions logarithmes.

Définition 1

La fonction $f : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ est continue sur $]0,+\infty[$. Elle admet une unique primitive s'annulant en 1. Cette primitive est, par définition, la fonction logarithme népérien notée ln

Proposition 4

Pour $(x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ et, pour $n \in \mathbb{Z}$ on a :

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \qquad \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x) \qquad \ln(x^n) = n\ln(x)$$

Proposition 5

La fonction ln est strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Elle vérifie

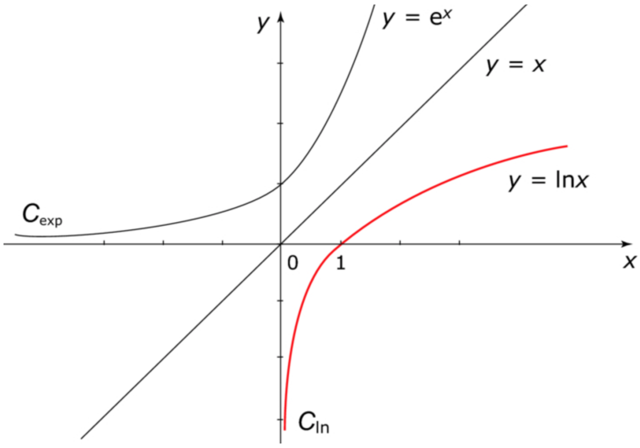
$$\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

Théorème 6

- Pour $x \in \mathbb{R}$ on a $\ln(e^x) = x$.
- Pour $y > 0$ on a $e^{\ln(y)} = y$

Tableau de variation.

x	0	1	$+\infty$
$\ln' x = \frac{1}{x}$		$+$	
$\exp(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$



Représentation graphique de $\ln$ **et** $\exp$.

Définition 2 (Logarithme décimal)

On définie le logarithme décimal par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

Proposition 7

Toutes les propriétés du logarithme népérien sont conservées, sauf que cette fois l'on a :

- $\log 10 = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \log(10^x) = x$

La fonction inverse du logarithme est donc la fonction $x \mapsto 10^x$ définie sur $\mathbb{R}$.

D Fonctions puissances.

Définition 3 (Fonctions puissances)

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $x > 0$, on définit x^a par

$$x^a = \exp(a \ln(x))$$

Avec $a \neq 0$. Si l'on pose : $f \ : \ \begin{array}{ccc}]0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^a \end{array}$. Alors $f'(x) = \dfrac{a}{x} x^a = a x^{a-1}$.

On retrouve donc la formule que l'on connait dans le cas où $a \in \mathbb{Z}^*$.

E Fonctions circulaires.

Revoir les définitions vues à l'occasion du chapitre sur la trigonométrie, ainsi que les formules de trigonométrie.

On retiendra que :

- cos et sin sont définies sur $\mathbb{R}$ tandis que tan n'est pas définie sur $\left\{k\pi + \dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Ne pas oublier dés lors les limites de tan aux bornes de sont ensembles de définition (C'est-à-dire en tous points de $\left\{k\pi + \dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$ à gauche et à droite.)
- cos est pair et que sin et tan sont impaires.
- cos et sin sont 2π-périodique et tan est π-périodique.

F Méthodes.

Méthode 1 (Étude de fonction.)

Attention certaines de ces étapes peuvent s'avérer inutiles (par exemple la parité si les fonctions ne sont pas circulaires)
$1^{ière}$ **Étape :** Domaine de définition.
$2^{ième}$ **Étape :** Parité. (et réduction du domaine de d'étude ?)
$3^{ième}$ **Étape :** Périodicité (et réduction du domaine de d'étude ?)
$4^{ième}$ **Étape :** Calcul de la dérivée.
$5^{ième}$ **Étape :** Étude du signe la dérivée.
$6^{ième}$ **Étape :** Tableau de variation.
$7^{ième}$ **Étape :** Limites aux bornes du domaine de définition.
$8^{ième}$ **Étape :** Branches infinies et asymptotes.

Méthode-exemple 2 (Périodicité)

Étude de la parité. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2x) + \cos(3x)$.

- Ici $\cos(2x)$ et $\cos(3x)$ sont respectivement π-périodique et $\frac{2\pi}{3}$-périodique.
- On déterminer la période "commune" . On obtient que f est 2π-périodique.
- On réduira l'intervalle d'étude à un intervalle de longueur 2π.
- **Attention :** plutôt que $[0, 2\pi]$ on choisira $[-\pi, \pi]$. En effet, ici la fonction est paire. On peut réduire l'intervalle symétrique $[-\pi, \pi]$ a $[0, \pi]$ puis l'on déduira le reste de la représentation par symétrie par rapport à $(0y)$.

Méthode-exemple 3 (Décomposition en fonction de référence : (in)-équation)

On peut parfois étudier certaines (in)-équations par décomposition en fonction de référence :
Par exemple l'étude de $\frac{-3}{\sqrt{x^2+16}} + 1 \leqslant \frac{2}{5}$, sur l'intervalle $[3; +\infty[$.

Méthode-exemple 4 (Étude de fonction et inéquation)

On peut résoudre des inéquations par des études de fonction. Voir exercice 8.

Méthode-exemple 5 (égalité et valeur absolue)

Pour $|3x - 5| = |5x - 3|$
• 1^{ier} **cas :** $3x - 5 = 5x - 3 \Leftrightarrow x = -1$.
• $2^{ième}$ **cas :** $3x - 5 = -(5x - 3) \Leftrightarrow x = 1$.
Soit donc deux solutions : $S = \{-1; 1\}$

Méthode-exemple 6 (égalité et valeur absolue)

Pour $|3x - 5| \leqslant |5x - 3|$
Comme ce sont des nombres positifs, on résout :
$|3x - 5| \leqslant |5x - 3| \leqslant 0 \Leftrightarrow (3x - 5)^2 \leqslant (5x - 3)^2 \Leftrightarrow 0 \leqslant 16x^2 - 16$
Soit maintenant, on étudie le polynôme du second degré soit on remarque :

$$16x^2 - 16 = 16(x - 1)(x + 1)$$

Puis tableau de signe.