Chapitre 9 : Fonction trigonométrie.

Notation : Dans l'ensemble du chapitre, on considérera $\mathscr{P}$ le plan, repéré par le repère orthonormé $(O, \overline{\imath}, \overline{\jmath})$.

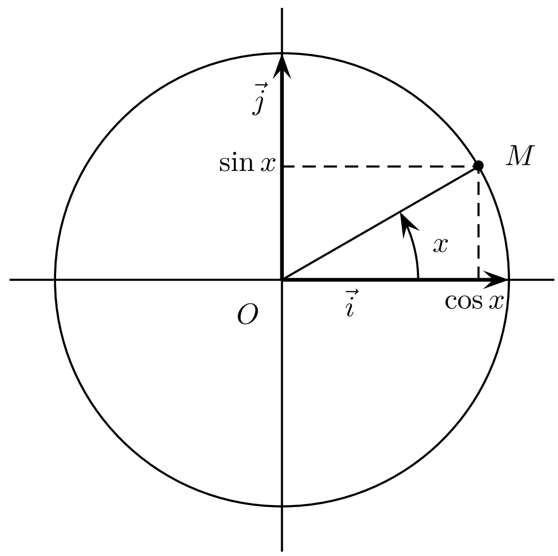
I Cercle trigonométrique, angles orientés et sinus et cosinus

A Définition.

Définition 1

On considère le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$, I le point de $\mathcal{C}$ de coordonnées $(1, 0)$ et M un point quelconque de $\mathcal{C}$, et enfin x une mesure en radian de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM}\right)$. Alors les coordonnées du point M sont appelées respectivement le cosinus et sinus de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM}\right)$.
On notera :

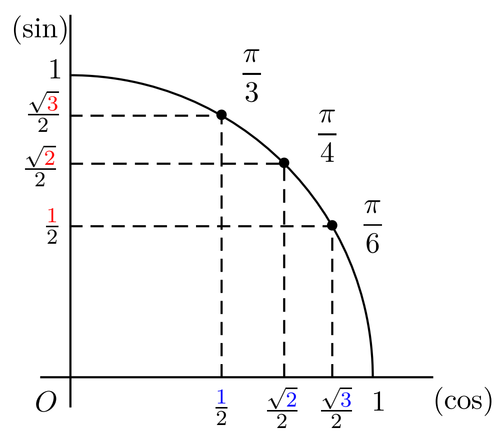
$$M(\cos x, \sin x)$$



B Valeurs particulières.

Á l'aide de l'exercice précédent et de propriétés graphiques nous pouvons en déduire les valeurs ci-dessous :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
x en degré	0°	30°	45°	60°	90°	180°
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0



Vidéo 1

- Exemple 1
- Exemple 2

C Propriétés.

Proposition 1

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$, on a :

- $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$.
- $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$.
- $\sin(x + 2k\pi) = \cos(x)$.
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

D Formules trigonométrique des angles associés.

Proposition 2

pour tout nombre réel réel x, on a :

- $\cos(-x) = \cos(x)$ (cos est pair)
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
- $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$
- $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$
- $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$
- $\sin(-x) = -\sin(x)$ (sin est impair)
- $\sin(\pi - x) = -\sin(x)$
- $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$
- $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$
- $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$

Remarque 1. Attention ces formules ne sont pas forcément à apprendre, mais surtout il faut savoir les retrouver. Voir la méthode ci-dessous et aussi page 190 du livre.

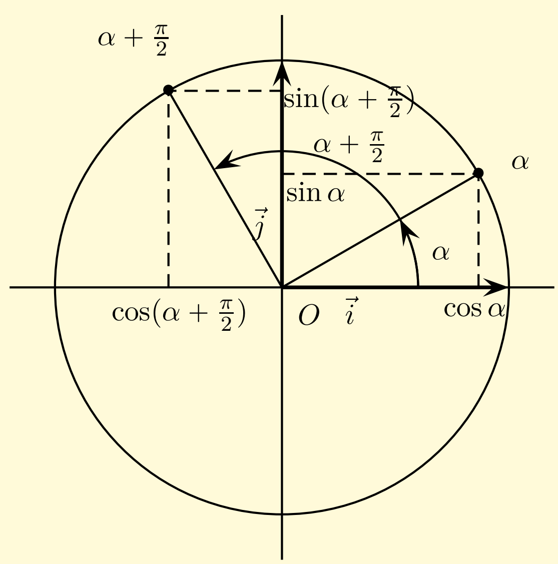
Méthode 1

Pour retrouver la simplification de $\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right)$ par exemple. On commence par tracer l'angle $\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right)$ sur le cercle trigonométrique. Ensuite remarque l'égalité entre les longueurs :

- OD (égale à l'opposé du cosinus de l'angle $\left(\alpha + \dfrac{\pi}{2}\right)$ sur le graphique de droite)
- et OA (qui elle est égale au sinus de l'angle x sur le graphique de droite)

On obtient donc bien la formule :

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\alpha)$$



E Résolution d'équations trigonométriques.

Proposition 3

Soit a un nombre réel. Alors :

- L'équation $\cos x = \cos a$ aura pour solution les nombres réels :

$$x = a + 2k\pi \quad et \quad x = -a + 2k\pi \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}$$

- L'équation $\cos x = \sin a$ aura pour solution les nombres réels :

$$x = a + 2k\pi \quad et \quad x = \pi - a + 2k\pi \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}$$

Remarque 2. L'équation $\cos x = \sin y$ peut se résoudre en utilisant la formule $\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \sin(y)$.
Donc l'équation devient :

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} - y + 2k\pi \\ ou \\ x = -\frac{\pi}{2} + y + 2k\pi \end{cases} \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}$$

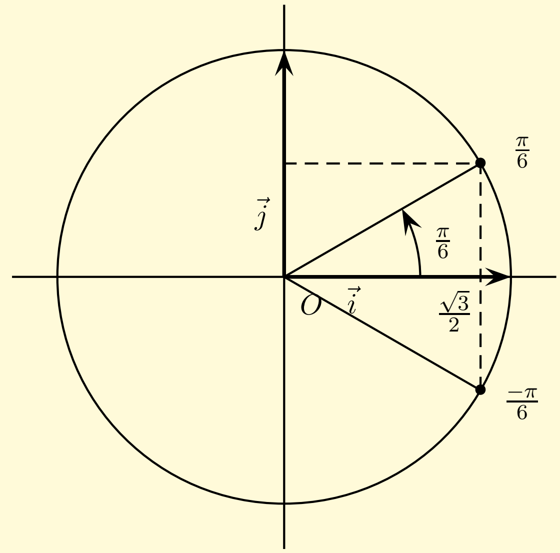
Méthode 2 (Résolution d'équation trigonométrique)

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$1^{ière}$ **étape :** On cherche un antécédent de $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
A l'aide du tableau de valeurs, on obtient :

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)$$



$2^{ième}$ **étape :** On utilise la proposition précédente :

$$\cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}3x+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\\ ou\\ 3x+\dfrac{\pi}{2}=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\end{array}\right.$$

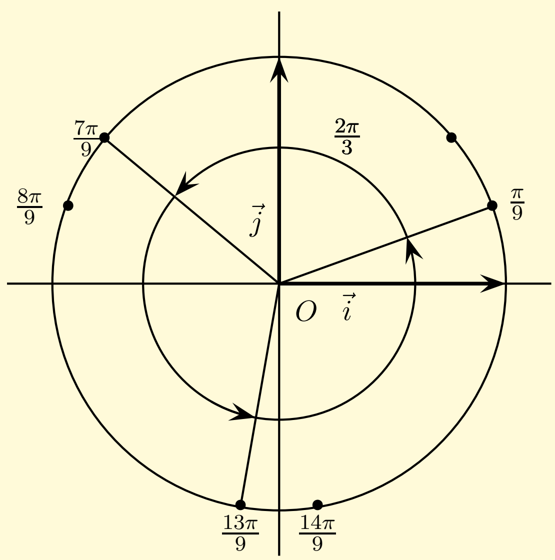
$3^{ième}$ **étape :** On résout les équations ainsi obtenues :

$$\cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}3x=\dfrac{-\pi}{3}+2k\pi\\ ou\\ 3x=-\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x=\dfrac{-\pi}{9}+\dfrac{2k\pi}{3}\\ ou\\ x=-\dfrac{2\pi}{9}+\dfrac{2k\pi}{3}\end{array}\right.$$

$4^{ième}$ **étape :** Placer les points sur le cercle trigonométrique correspondant au angle solution de l'équation :

Pour la première équation $x=\dfrac{-\pi}{9}+\dfrac{2k\pi}{3}$, On obtient A pour $k=0$. Puis pour les points C (obtenu pour $k=1$) et E (obtenu pour $k=2$) on procède en ajoutant l'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

Pour la deuxième équation $x=\dfrac{-2\pi}{9}+\dfrac{2k\pi}{3}$, On obtient G pour $k=0$. Puis pour les points K (obtenu pour $k=1$) et M (obtenu pour $k=2$) on procède en ajoutant l'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.



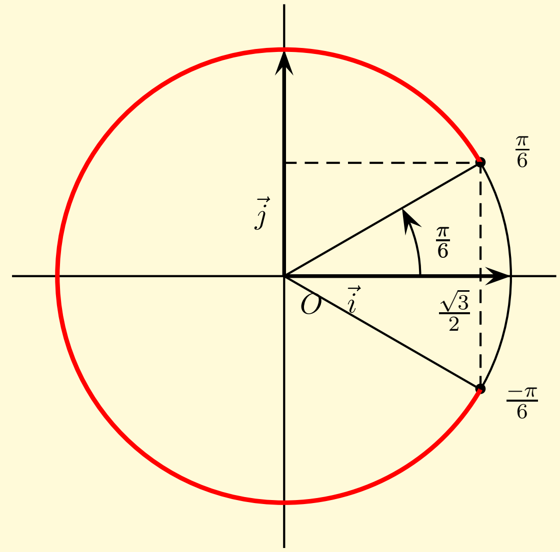
Vidéo 2

Résoudre une équation trigonométrique

Méthode 3 (Résolution d'inéquation trigonométrique)

Résoudre sur l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ l'inéquation :

$$\cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$1^{ière}$ **étape :** On pose $X = 3x + \frac{\pi}{2}$ pour résoudre dans un premier temps $\cos(X) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ Avec :

$x \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow 3x \in \left[\frac{-3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \Leftrightarrow X = 3x + \frac{\pi}{2} \in [-\pi, 2\pi]$

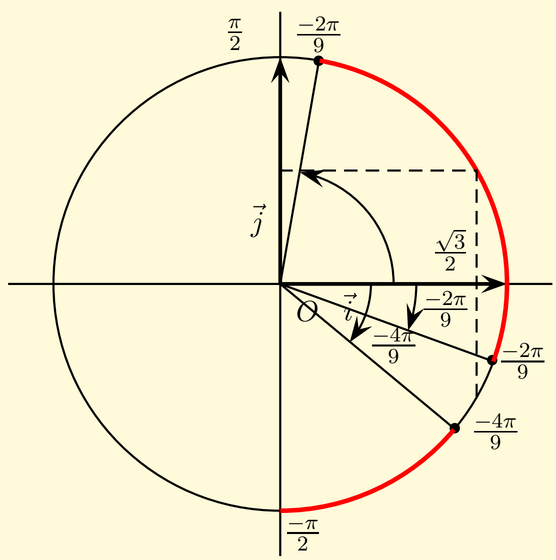
$2^{ième}$ **étape :** On utilise le cercle trigonométrique pour résoudre l'inégalité précédente en X :
Puisque $X \in [-\pi, 2\pi]$, avec le graphique si dessus l'on obtient que $\cos(X) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ si $X \in \left[-\pi, \frac{-\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right]$.

$3^{ième}$ **étape :** On a plus qu'à résoudre en x :

$$X = 3x + \frac{\pi}{2} \in \left[-\pi, \frac{-\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right] \Leftrightarrow 3x \in \left[\frac{-3\pi}{2}, \frac{-2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{-\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{-2\pi}{9}\right] \cup \left[\frac{-\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}\right]$$

$4^{ième}$ **étape :** On peut placer les solution sur le cercle trigonométrique :



II Fonctions circulaires : sinus et cosinus

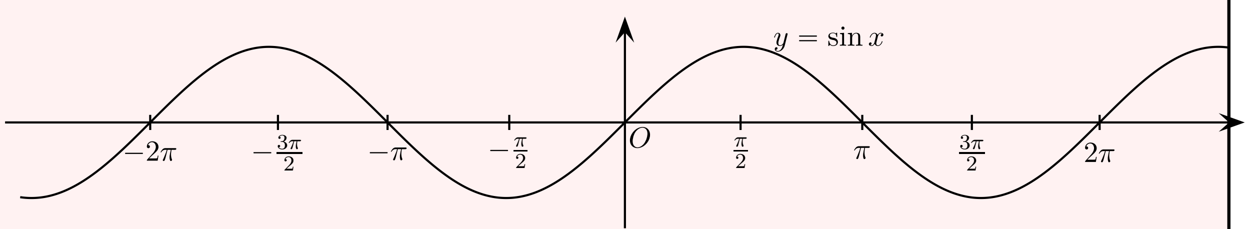
Proposition 4 (La fonction sinus.)

La fonction sin vérifie les propriétés :

- La fonction sinus est 2π-périodique : $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x+2\pi) = \sin(x)$.
- La fonction sinus est impaire : $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(-x) = -\sin(x)$
- La fonction sinus est dérivable $\forall x \in \mathbb{R},\ \sin'(x) = \cos(x)$
- Tableau de variation :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos(x)$		$+$	0	$-$	
$sin(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

- Représentation graphique :



Proposition 5 (La fonction cosinus.)

La fonction cos vérifie les propriétés :

- La fonction cosinus est 2π-périodique : $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x+2\pi) = \cos(x)$.
- La fonction cosinus est paire : $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(-x) = \cos(x)$
- La fonction sinus est dérivable $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos'(x) = -\sin(x)$, et si $u : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur l'intervalle I alors : $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos'(u(x)) = -u'(x)\sin(u(x))$
- Tableau de variation :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$-\sin(x)$			$-$		
$\cos(x)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

- Représentation graphique :