Chapitre 9 : Intégration.

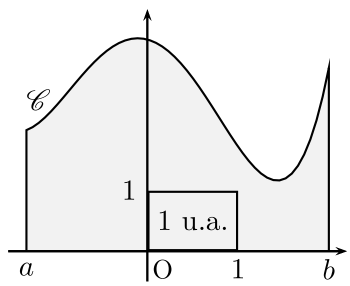
I Attendus.

- Savoir évaluer graphiquement la valeur d'une intégrale. *(1 page 201)*
- Savoir utiliser le *théorème fondamental. (9 page 203)*
- Vérifier qu'une fonction est une primitive. *(10 page 203)*
- Retenir qu'une primitive est connue à une *constante près.*
- Déterminer une primitive à partir des tableaux. *(15-16 page 205)*
- Calculer une intégrale à l'aide de primitive. *(20 page 207)*
- Rapport avec le calcul d'aire. *(21 page 207)*
- Utiliser la linéarité de l'intégrale. *(26 page 209)*
- Utiliser les inégalités sur les intégrales pour trouver un encadrement. *(27 page 209)*
- Intégrales et suites. *(104-105 page 2017)*

II Intégrale d'une fonction continue et positive

Définition 1

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.
$\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
Le **domaine situé sous la courbe** $\mathscr{C}$ est le domaine situé entre $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.



Définition 2

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.
L'intégrale de a **à** b **de la fonction** f est l'aire, en unité d'aire, du domaine situé sous la courbe $\mathscr{C}$.
On la note $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Proposition 1

Pour toute fonction f **continue et positive** sur $[a;b]$:

- , $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est un nombre réel
- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x =$
- **Relation de Chasles :** $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x =$

Exercices 2 à 8 page 201 puis 41 à 46 page 211

III Notion de primitives

Théorème 2

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.
La fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[a;b]$ et a pour dérivée f.

Démonstration. ***Exercice 11 page 203***

Définition 3

f est une fonction définie sur un intervalle I.
Dire que F est une **primitive de f sur I** signifie que F est dérivable sur I et que $F' = f$.

Exemple 1. $\begin{array}{rccc} F & : & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & 3x^2 + \dfrac{1}{x} \end{array}$ et $\begin{array}{rccc} G & : & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & 3x^2 + \dfrac{1}{x} + 9 \end{array}$.

Proposition 3

Soit f une fonction définie sur I et qui admet une primitive F sur I.
(1) L'ensemble des primitives de f sur I est constitué par les fonctions G définies sur I par :

(2) Il existe une primitive de f sur I **et une seule** telle que $G(x_0) = y_0$, où x_0 et y_0 sont des réels donnés et $x_0 \in I$.

Exemple 2. On considère la fonction

$$\begin{array}{rccc} f & : &]0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{6x^3-1}{x^2} \end{array}$$

Déterminer la primitive de f qui s'annule en 1. (on utilisera le résultat trouver dans l'exemple précédent)

Exercices 18-19 page 205 puis 47 à 58 page 211.

IV Calculs de primitives

Théorème 4

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives.

Primitives de fonctions usuelles *(Dans les deux tableaux suivants, C désigne un nombre réel.)*

f **définie sur** I **par** $f(x) = \dots$	F **primitive de** f **sur** I **définie par** $F(x) = \dots$	**L'intervalle** $I = \dots$
k (avec $k \in \mathbb{R}$)		
x		
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)		
$\frac{1}{x}$		
$-\frac{1}{x^2}$		
$\frac{1}{\sqrt{x}}$		
$\sin x$		
$\cos x$		
ϵ^x		

Primitives et opérations sur les fonctions : u est une fonction dérivable sur I

Fonction f	**Primitive de** f **sur** I	**Conditions sur** u
$u'\ u^n$ ($n \in \mathbb{Z}^*$ et $n \neq -1$)	$\frac{1}{n+1}\ u^{n+1} + C$	Si $n < -1$, $\forall x \in I$, $u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u + C$	$u(x) > 0$ sur I
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + C$	$u(x) \neq 0$ sur I
$u'\ \epsilon^u$	$\epsilon^u + C$	
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + C$	$u(x) > 0$ sur I
$x \mapsto u(ax+b)$ ($a \neq 0$ et $x \in J$)	$x \mapsto \frac{1}{a}\ U(ax+b)$	$\forall x \in J$, $ax+b \in I$ et U primitive de u sur I.

Exemple 3. Déterminons une primitive pour chacune des fonction suivante (on donnera l'ensemble de définition de cette primitive)

- $f(x) = x^2 - 5x + 2$
- $g(x) = \frac{2}{x^2} - \cos x$
- $h(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + 3\mathrm{e}^x$

Exercices 59 à 71 page 213.

V Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

A Calcul d'une intégrale

Proposition 5

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et F une primitive de f sur $[a;b]$. On a alors :

Définition 4

Soit f une fonction continue et **de signe quelconque** sur $[a;b]$. **L'intégrale de** a **à** b **de** f est le nombre

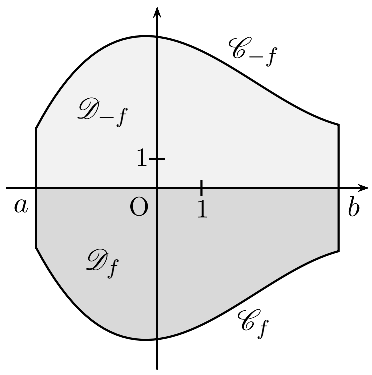
où F est une primitive de f sur $[a;b]$. On note la de la même façon : $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$.

Exemple 4. Calculer les intégrales suivantes :

- $\displaystyle\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_0^\pi \cos(x)\ \mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_{-1}^1 3x^2-5x+1\ \mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_1^2 \frac{6x^3-1}{x^2}\ \mathrm{d}x$

Exercices 23 à 25 page 207 puis 72 à 83 page 213

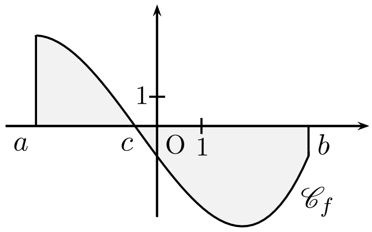
B Intégrale et aire



a) Cas d'une fonction f continue et négative sur $[a;b]$

aire$(\mathscr{D}_f)$ =

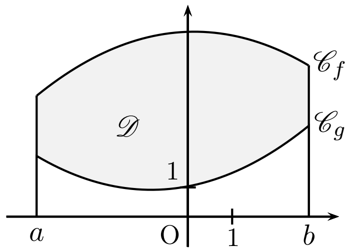
Vocabulaire : On dira que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est **l'aire algébrique** du domaine $\mathscr{D}_f$. Elle est positive si f est positive sur $[a;b]$ et négative si f est négative sur $[a;b]$.



b) Cas d'une fonction f continue et de signe quelconque sur $[a;b]$

L'aire de $\mathscr{D}_f$ est la somme des aires algébriques des domaines définis par des intervalles sur lesquels f garde un signe constant. Dans l'exemple ci-contre :

aire$(\mathscr{D}_f)$ =



c) Aire d'un domaine entre deux courbes

Si $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $[a;b]$, alors l'aire du domaine $\mathscr{D}$ délimité par $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sur $[a;b]$ est :

aire$(\mathscr{D})$ =

VI Propriétés des intégrales

f et g sont des fonctions **continues** sur un intervalle $[a;b]$.

A Propriétés algébriques

Proposition 6 (Linéarité de l'intégration)

- $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x =$
- Pour tout nombre rél λ, $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x =$

Exemple 5. Soit $A = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x$ et $B = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$. Calculons $A+B$ et $A-B$ pour en déduire la valeur de A et B.

Exercice 28 page 209

Proposition 7 (Relation de Chasles)

Pour tous nombres réels c, d, e de $[a;b]$, $\displaystyle\int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^e f(x)\,\mathrm{d}x =$

Exercice 29-30 page 209 et 84 page 214*. Puis 85 à 89 page 214*

B Intégrales et inégalités

Proposition 8 (Positivité)

- Si, pour tout nombre réel x de $[a;b]$, $f(x) \geqslant 0$, alors
- Si, pour tout nombre réel x de $[a;b]$, $f(x) \leqslant 0$, alors

Exercice 31 page 209 puis 88 page 214.

Proposition 9 (Ordre)

Si, pour tout nombre réel x de $[a;b]$, $g(x) \leqslant f(x)$, alors ....

Exercice 32-33 page 209 puis 89 à 95 page 214

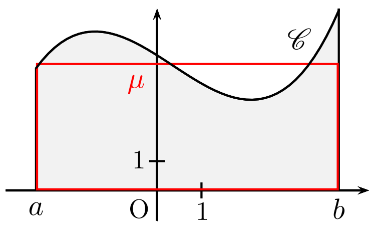
C Valeur moyenne

Définition 5

La **valeur moyenne** d'une fonction f sur un intervalle $[a;b]$ (avec $a < b$) est le nombre réel μ défini par

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Interprétation graphique : cas où f est positive sur $[a;b]$



Dans un repère orthogonal, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f.

On a : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x =$ ....

Donc l'aire du domaine situé sous la courbe $\mathscr{C}$ est égale à l'aire du rectangle de dimensions ......et ......

Exemple 6. La valeur moyenne de la fonction cosinus sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

Exercice 34 page 209 puis 96 à 99 page 214

Théorème 10 (Inégalité de la moyenne)

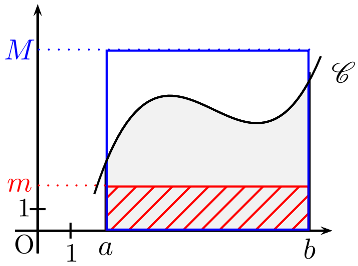
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit a et b deux nombres de I tels que $a < b$.
Si m et M sont deux nombres tels que pour tout x de $[a;b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$ alors :

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$$

On a alors un encadrement de la valeur moyenne de f sur $[a;b]$ soit :

Interprétation graphique : cas où f est positive sur $[a;b]$

Si f est bornée sur $[a;b]$ par deux constantes m et M positives, alors l'inégalité de la moyenne signifie que l'aire sous la courbe $\mathscr{C}$ sur $[a;b]$ est comprise entre les aires des rectangles de dimensions .... et respectivement m et M.



Exemple 7. Trouver un encadrement de la valeur moyenne sur $[1,2]$ de la fonction :

$$\begin{array}{rcccl} f & : &]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & 3\ln^2 x + 2 \end{array}$$