Chapitre 9 : Suites arithmétiques et géométriques

I Attendus

- Déterminer la raison et le premier terme d'une suite arithmétique ou géométrique à partir de deux termes de la suite.
- Savoir reconnaître une suite arithmétique ou géométrique. *1 page 13 et 1 page 15*
- Déterminer les termes d'une suite arithmétique ou géométrique. *2 page 13 et 2 page 15*
- Savoir déterminer la somme de termes d'une suite arithmétique ou géométrique. *3 page 13 et 3 page 15*
- Savoir déterminer la limite d'une suite arithmétique à partir de sa raison.
- Savoir déterminer la limite d'une suite géométrique à partir de son premier terme et de sa raison.
- Lorsque $0 < q < 1$, savoir déterminer à partir de quel rang q^n est inférieur à un nombre $a > 0$ donné.

II Suites arithmétiques

Exercice 1. Louis perçois 50 € d'argent de poche tous les mois depuis le premier janvier 2010. On note u_n la totalité de son argent poche cumulé le n ième mois. (il a décidé de ne pas le dépenser). Il disposait initialement de 300 €.

1. Déterminer u_1 puis u_2 puis u_3, dites ce que représentent ces sommes.
2. Déterminer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n.
4. Déterminer les variations de la suite (u_n).
5. Que pensez-vous de la limite de la suite (u_n).

A Généralités.

Exemple 1. Bruno dispose de 100 € dans sa tirelire, donné par sa grand-mère. Bruno reçoit chaque mois 45 € de ses parents qu'il met systématiquement dans sa tirelire. On note u_n la somme dans sa tirelire au $n^{ième}$ mois. On obtient la formule de récurrence :

$$u_{n+1} = u_n + \underbrace{45}_{\textit{Somme déposée chaque mois}}$$

On dira que (u_n) est une **suite arithmétique** de **raison** 45 et de **premier terme** $u_0 = 100$.

Définition 1

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **arithmétique** de raison r signifie que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = u_n + r$$

Remarque 1. Cette définition reste valable même si le premier terme de la suite n'est pas u_0. Il arrive souvent que le premier terme de la suite soit u_1.

Exemple 2. Les suites de nombres entiers suivantes sont en progression arithmétique :

- 1, 2, 3, 4, 5, ...
- 1, 3, 5, 7, 9...
- 7, 4, 1, -2, -5...
- ...

Exemple 3. La somme globale dont on dispose dans une tirelire lorsque l'on dépose chaque mois la même somme et qu'on ne retire rien.

Exemple 4. Une suite numérique d'expression affine en fonction de $n \in \mathbb{N}$ sous la forme

$$u_n = 5n + 3$$

Vidéo 1

Pour montrer qu'une suite est arithmétique ou non.

Proposition 1

Si la suite (u_n) est arithmétique de raison r, alors

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2 : u_n = rn + u_0 = (n - p)r + u_p$$

Démonstration 1. Idée de démonstration : On remarque que si $u_n = (n-p)r + u_p$ alors $u_{n+1} = u_n + r = rn + u_0 = (n-p)r + u_p + r = (n+1-p)r + u_p$. On dira que par "effet de domino" la propriété devient vrai à tous les termes $n \geqslant p$. De même dans pour $p \geqslant n$ mais avec $u_{n-1} = u_n - r$.

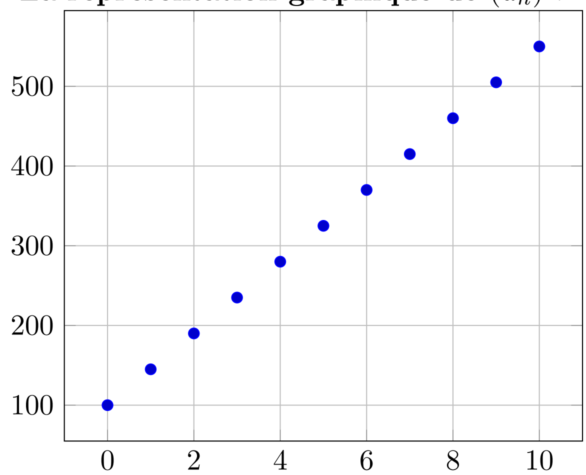
Vidéo 2

Démonstration en vidéo

Remarque 2. On reconnait l'expression d'une fonction affine et la représentation graphique sera constituée de points alignés.

Exemple 5. Si l'on reprend l'exemple précédent avec un dépôt de 45 €, on a $u_{n+1} = u_n + 45$.
L'expression de u_n en fonction de n est donc $u_n = 45n + 100$.

La représentation graphique de (u_n) :



Vidéo 3

Déterminer la raison et le premier terme d'une suite arithmétique

Proposition 2

Toute suite dont le terme générale peut s'écrire sous la forme $u_n = an + b$ est une suite arithmétique de raison a.

Démonstration 2. Si $u_n = an + b$ alors $u_{n+1} = a(n+1) + b = an + b + a = u_n + a$. D'où le résultat.

Vidéo 4

Reconnaitre une suite arithmétique
Déterminer la raison et le premier terme d'une suite arithmétique

Ex 15 à 21 page 31

B Somme des termes d'une suite arithmétique.

Proposition 3

Somme des n premier entier :

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + ... + n = \frac{1+n}{2} \times n$$

Démonstration 3. Deux cas :

- Si $n = 2p$ est pair :
$1 + 2 + ... + n = 1 + 2 + 3 + ... + p + (p+1) + ... + 2p = \underbrace{(1+2p) + (2 + (2p-1) + ...(p + (p+1))}_{p \text{ termes égaux à } 2p+1=n+1}$
. $= p \times (n+1) = \dfrac{n}{2} \times (n+1)$
- Si $n = 2p+1$ est impair :
$1 + 2 + ... + n = 1 + 2 + 3 + ... + p + (p+1) + ... + 2p + (2p+1) = \underbrace{(1+2p) + (2 + (2p-1) + ...(p + (p+1))}_{p \text{ termes égaux à } 2p+1=n} + n$
. $= p \times n + n = (p+1) \times n = \dfrac{1+n}{2} \times n$

Exemple 6. Calcul de :

$$\sum_{k=1}^{100} k = 1 + 2 + ... + 100 = \frac{1+100}{2} \times 100 = 5050$$

Exemple 7. Si (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2.
Calcul de :

$$\sum_{k=0}^{10} u_k = \underbrace{3}_{u_0} + \underbrace{3+2}_{u_1} + \underbrace{3+2\times 2}_{u_2} + ... + \underbrace{3+2\times 10}_{u_{10}} = 3 \times 11 + 2 \times \frac{1+10}{2} \times 10 = 143$$

Calcul de :

$$\sum_{k=3}^{10} u_k = 9 + 11 + 13 + ... + 23 = 9 \times \underbrace{8}_{nb \text{ de } "3"} + 2 \times \frac{1+7}{2} \times 7 = 128$$

Vidéo 5

Somme des termes d'une suite arithmétique et Vidéo

Ex 30-31-34-36 page 32

C Variation et limite d'une suite arithmétique.

Proposition 4

On considère ici (u_n) comme une suite arithmétique.

- Si $r > 0$ la suite (u_n) est croissante et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
- Si $r < 0$ la suite (u_n) est décroissanteet $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Exemple 8. Déterminons la limite de la suite arithmétique de premier terme $u_0 = -20$ et de raison $0,01$.

Vidéo 6

Comment étudier les variation d'une suite arithmétique

III Suites géométriques

A Généralités.

Exemple 9. On place une somme de 100 € sur un livret A rémunéré à 0,75 % par an. On note u_n la somme sur le compte à la $n^{ième}$ année. On obtient la somme de récurrence $u_{n+1} = \underbrace{1,0075}_{\textit{pour augmenter de } 0{,}75\%} \times u_n$.

On dira que (u_n) est une **suite géométrique** de **raison** 1,0075 et de **premier terme** $u_0 = 100$.

Définition 2

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison q signifie que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = q \times u_n$$

Remarque 3. Cette définition reste valable même si le premier terme de la suite n'est pas u_0. Il arrive souvent que le premier terme de la suite soit u_1.

Exemple 10. Les suites de nombres entiers suivantes sont en progression arithmétique :

- 1, 2, 4, 8, 16, ...
- 32, 16, 8, 4, 2...
- 1, -1, 1, -1, 1...
- ...

Exemple 11. La somme globale dont on dispose sur un compte rémunérer livret A à 0,75 % lorsque l'on a déposer un somme à une date donnée

Exemple 12. Une suite numérique d'expression affine en fonction de $n \in \mathbb{N}$ sous la forme

$$u_n = 3 \times 5^n$$

Proposition 5

Si la suite (u_n) est géométrqiue de raison q, alors

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2 : u_n = q^{n-p} \times u_p = q^n \times u_0$$

Exemple 13. Si l'on reprend l'exemple précédent, on a $u_{n+1} = \underbrace{1,0075}_{\textit{pour augmenter de } 0{,}75\%} \times u_n$.

L'expression de u_n en fonction de n est donc $u_n = 1,0075^n \times u_0 = 1,0075^n \times 100$.

Vidéo 7

Déterminer la raison et le premier terme d'une suite géométrique

Proposition 6

Une suite dont le terme générale s'écrire sous la forme aq^n est une suite géométrique de raison q.

Vidéo 8

Reconnaitre une suite géométrique et vidéo

Ex 22 à 29 page 31-32

B Somme des termes d'une suite géométrique.

Proposition 7

Pour q un réel différent de 1 et un entier n, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q alors

$$u_k + u_{k+1} + ... + u_n = 1^{ier} terme \times \frac{1 - q^{\text{nb de termes}}}{1-q}$$

Démonstration 4. Démontration

Exemple 14. Calcul de :

$$\sum_{k=0}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \left(\frac{1}{2}\right)^{10}) = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{11}}\right)$$

%endcenter

Exemple 15. Si (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2.
Calcul de :

$$\sum_{k=0}^{10} u_k = 3 \times 2^0 + 3 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + ... + 3 \times 2^{10} = 3 \times (1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{10} = 3\frac{1-2^{11}}{1-2} = 3\left(2^{11} - 1\right)$$

Calcul de :

$$\sum_{k=3}^{10} u_k = 24 + 48 + 96 + ... + 3 \times 2^{10} = 24\frac{1-2^8}{1-2} = 24\left(2^7 - 1\right)$$

Vidéo 9

Somme des termes d'une suite géométrique

Exercices 32-33-35-37 page 32

C Limite d'une suite géométrique.

Proposition 8

Soit q un réel **strictement positif**. On observe les deux cas suivants :

- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.
- Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = \lim\limits_{n \to +\infty} 1^n = 1$.
- Si $1 < q$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

Proposition 9

On considère ici u_n comme une suite géométrique.

	1^{ier} terme > 0	1^{ier} terme < 0
Si $0 < q < 1$	$u_n \longrightarrow 0$	$u_n \longrightarrow 0$
Si $q = 1$	u_n constante	u_n constante
Si $1 < q$	$u_n \longrightarrow +\infty$	$u_n \longrightarrow -\infty$

Vidéo 10

Étude de la limite d'une suite géométrique et Vidéo

D Variation d'une suite géométrique.

Proposition 10

On considère ici u_n comme une suite géométrique dont la raison est strictement positive.

	1^{ier} terme > 0	1^{ier} terme < 0
Si $0 < q < 1$	$u_n \searrow 0$	$u_n \nearrow 0$
Si $q = 1$	u_n constante	u_n constante
Si $1 < q$	$u_n \nearrow +\infty$	$u_n \searrow -\infty$

Exemple 16. Déterminons la limite des suites géométrique dont on donne le premier terme u_0 et de raison q :

- $u_0 = 1$ et $q = 2$.
- $u_0 = 1$ et $q = 1,01$.
- $u_0 = 5$ et $q = 0,98$.
- $u_0 = -100$ et $q = -0,8$.
- $u_0 = -0,1$ et $q = -2$.
- $u_0 = 0,001$ et $q = 1,001$.

Vidéo 11

Comment étudier les variations d'une suite géométrique

E "Rapidité" de la convergence vers 0

Lorsque $0 < q < 1$ et que le premier terme est positif, on peut déterminer le rang à partir du quel les termes de la suite sont plus petit qu'un réel $A > 0$ donné. Voici un algorithme qui fonctionne :
$1^{iére}$ étape affectation et saisie :

- choisir A
- n=0
- Entrer $u = 1^{ier} terme$ et $q = raison$

$2ième$ étape : boucle "tant que"

- Tant que $u_n \geqslant A$ faire
    - $n \longleftarrow n+1$
    - $u \longleftarrow u \times q$

$3^{ième}$ étape : afficher n.