Chapitre 8 : Intervalle de fluctuation. Estimation.

I Attendus

- Savoir déterminer un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % :
  - A partir de la définition.
  - A partir des deux formules.
- Savoir interpréter ce résultat pour une prise de décision.
- Savoir déterminer un intervalle de confiance au seuil de confiance de 95 %.
- Savoir déterminer la valeur de n pour obtenir une amplitude d'intervalle (fluctuation ou estimation) donnée.

Voir exemple détaillé page 221 et 223.

II Intervalle de Fluctuation.

Définition 1

On considère une population dont une proportion p des individus possèdent un caractère donné.
On prélève dans cette population un **échantillon** de taille n. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre d'individus possédant ce caractère dans cet **échantillon**. Alors X suit une loi $\mathscr{B}(n,p)$.
L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % associée à la variable aléatoire X est :

$$\left[\frac{a}{n};\frac{b}{n}\right] \quad \begin{cases} \text{ou est le plus petit entier } a \text{ tel que} P(X \leqslant a) \geqslant 2,5 \\ \text{ou est le plus petit entier } b \text{ tel que} P(X \leqslant a) \geqslant 97,5 \end{cases}$$

Dés lors $P(X \in [a;b]) \simeq 0,95$.

Proposition 1

Dans le cas où

- $n \geqslant 30$ (l'effectif de l'échantillon)
- $np \geqslant 5$ (l'espérance des succès)
- $n(1-p) \geqslant 5$ (l'espérance des échecs)

alors on obtient rapidement un intervalle proche de **l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % associée à la variable aléatoire X** , avec la formule :

$$\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}};p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

Et si l'on veut être plus précis, on utilisera l'intervalle :

$$\left[p-1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}};p+1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

Vidéo 1

Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % associée à la variable aléatoire X.

Proposition 2

Avec les données de la proposition 3, l'amplitude de l'intervalle de confiance de la proportion f au niveau de confiance 0,95 est : amplitude $= 2 \times 1,96 \times \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}} \simeq \dfrac{2}{\sqrt{n}}$

Exercice 14 à 25 page 226-227

III Prise de décision

Proposition 3

Si l'on fait **l'hypothèse** : "La proportion du caractère dans la population est égale à p" et que la fréquence observé sur **l'échantillon** de taille n est f. Alors :

- Si $f \in \left[\dfrac{a}{n}; \dfrac{b}{n}\right]$, **l'hypothèse** n'est pas rejetée au seuil de risque d'erreur de 5 %.
- Si $f \notin \left[\dfrac{a}{n}; \dfrac{b}{n}\right]$, **l'hypothèse** est rejetée au seuil de risque d'erreur de 5 %.

Vidéo 2

Utiliser un intervalle de confiance pour prendre une décision

IV Estimation d'une proportion.

Proposition 4

On considère une population dont une proportion p des individus possèdent un caractère donné. On prélève dans cette population un **échantillon** de taille n et l'on obtient une fréquence f de cet échantillon possédant le caractère étudié. On appelle **l'intervalle de confiance de la proportion p au niveau de confiance 0,95**, l'intervalle :

$$\left[f - 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}; f + 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right] \qquad \text{ou peu moins précis} \qquad \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

Il faudra bien sûr $n \geqslant 30$ (l'effectif de l'échantillon), $nf \geqslant 5$ et $n(1-f) \geqslant 5$.

Vidéo 3

Estimer une proportion // Intervalle de fluctuation.

Proposition 5

Avec les données de la proposition 3, l'amplitude de l'intervalle de confiance de la proportion f au niveau de confiance 0,95 est : $textamplitude = \dfrac{2}{\sqrt{n}}$

Exercice 26 à 37 page 228-229