Chapitre 1 : Suites et récurrences.

I Approche Globale.

A Un peu d'histoire.

On fait souvent remonter la récurrence à Euclide , l'exemple habituellement donné est la proposition 20 du livre IX des Éléments, où est prouvée l'existence d'une quantité arbitrairement grande de nombres premiers. Il y a l'esquisse d'une récurrence, mais elle n'est pas explicitée ; en outre l'idée d'une infinité de nombres premiers est absente.

Euclide : 300 av. J.-C.

V 1. Histoire

Vers l'an 1000, le persan Al-Karaji établit la formule du binôme de Newton (en fait il n'a pas les notations qui lui permettraient de l'énoncer dans le cas général, mais les méthodes fonctionnent pour un entier arbitraire). Il calcule également la somme des cubes des n premiers entiers naturels, al-Samaw'al poursuit ses travaux. Ces résultats utilisent bien des formes « archaïques » de définition et de raisonnement par récurrence.

Al-Karaji (953-1029)

Newton : 1643 -1727

Fibonacci, , se sert de l'une et de l'autre (sans le dire, bien sûr) : en témoignent sa fameuse suite et son algorithme de décomposition d'un rationnel en somme de fractions distinctes de numérateur 1. Il semble bien cependant que Pascal , pour la récurrence, et Fermat , pour la descente infinie, soient les premiers à avoir énoncé nettement ces principes et à en avoir reconnu la puissance et la généralité.

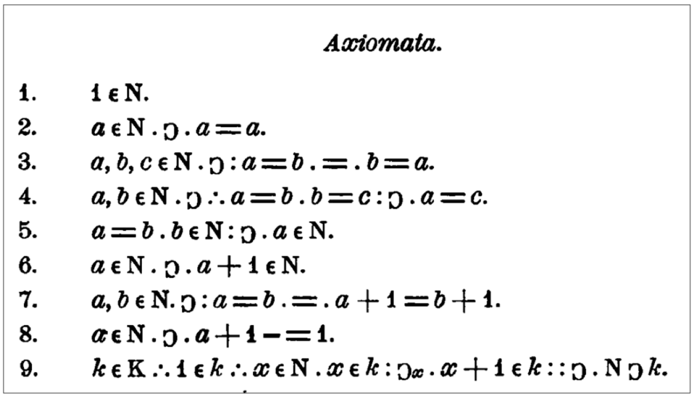
Fibonacci : 1170-1240

Pascal : 1623-1662

Fermat : 1607-1665

En 1889, Peano publia un court traité, Arithmetices principia, nova methodo exposita [8], rédigé pour moitié en latin et pour moitié dans un langage formalisé de son invention. Le but déclaré de l'ouvrage n'était rien de moins que donner aux mathématiques "un fondement irréprochable et d'en faire une sorte de mécanique du raisonnement". Il y propose une construction axiomatique de $\mathbb{N}$, ainsi qu'une liste de 9 axiomes est un peu redondante, l'axiome 9 est le principe de récurrence. (Le contenu de ces axiomes est très proche de la définition donnée par Dedekind en 1888. Peano ne cache d'ailleurs pas ce qu'il doit à l'article de son prédécesseur)

Peano 1858-1932



Axiomata.

1. $1 \in N$.
2. $a \in N . \supset . a = a$.
3. $a, b, c \in N . \supset : a = b . = . b = a$.
4. $a, b \in N . \supset \therefore a = b . b = c : \supset . a = c$.
5. $a = b . b \in N : \supset . a \in N$.
6. $a \in N . \supset . a + 1 \in N$.
7. $a, b \in N . \supset : a = b . = . a + 1 = b + 1$.
8. $a \in N . \supset . a + 1 -= 1$.
9. $k \in K \therefore 1 \in k \therefore x \in N . x \in k : \supset_x . x + 1 \in k :: \supset . N \supset k$.

B Algorithme

- Recherche de seuils.
- Recherche de valeurs approchées de π, e, $\sqrt{2}$, nombre d'or, ln(2)...

C Démonstrations.

- l'inégalité de Bernoulli.

V 2. Démonstration

D Attendus.

- Tous les attendus de première (suites arithmétiques et géométriques, comportement d'une suite, représentation d'une suite récurrente à partir de la représentation de la fonction f...)
- Savoir démontrer une propriété par récurrence : égalité, inégalité, monotonie, majoration ou (et) minoration...
- Si une suite est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, savoir :

V 3. Représentation d'une suite récurrente

- Démontrer une inégalité de la forme $u_n > a$ (ou $u_n < a$) par récurrence en utilisant l'étude de la fonction f.
- Démontrer la monotonie d'une suite par récurrence en utilisant l'étude de la fonction f.
- l'inégalité de Bernoulli :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (1+x)^n \geqslant 1+nx$$

II Définitions générales

A Variations.

Définition 1

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est :
- croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$
- décroissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$

La suite (u_n) sera dite monotone lorsqu'elle est croissante ou décroissante.

Exemple 1. Soit le suite (u_n) définie par $\forall \in \mathbb{N}, u_n = n^2 + 2n - 3$. Montrons que (u_n) est croissante.

B Majoration, minoration.

Définition 2

Soit (u_n) une suite réelle.
- La suite (u_n) est dite majorée si : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$
- La suite (u_n) est dite minorée si : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant m$
- La suite (u_n) est dite bornée si : $\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n \leqslant M$

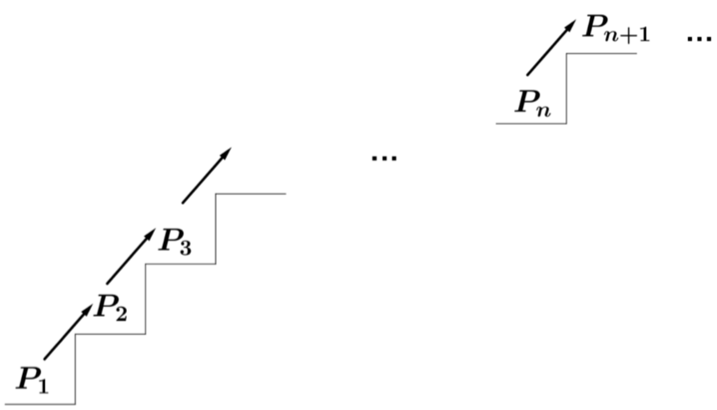
A retenir 1. . Attention !! Le majorant M doit être indépendant de n. Idem pour m.

Exemple 2. Soit le suite (u_n) définie par $\forall \in \mathbb{N}, u_n = n^2 + 2n - 3$. Montrons que (u_n) est minorée par -3.

III Raisonnement par récurrence

Si l'on étudie une propriété qui dépend d'un nombre entier que l'on notera P_n. Le but est de trouver un moyen pour démontrer cette propriété pour tout n.

Pour comprendre le principe de récurrence, on peut se donner l'image d'un escalier.



Ici, si l'on sait passé de la marche n et la marche $n+1$ (la suivante) et que l'on est capable d'atteindre la $5^{ième}$ marche par exemple alors on peut atteindre toutes les marche de l'escalier qui se situent après la $5^{ième}$ marche.

Proposition 1 (Raisonnement par récurrence)

Soit P_n une propriété. Le raisonnement par récurrence se mène en deux étapes :

1. **Initialisation :** C'est l'étape où l'on prouve que la propriété est vraie au départ. Il faut donc démontrer P_0. (Si l'on veut démontrer la propriétés à partir de $n = 0$)
2. **Hérédité :** C'est l'étape où l'on prouve que si la propriété est vraie à une étape (n'importe laquelle) alors elle est vraie à l'étape suivante. Il faut donc supposer que P_n est vraie pour un n quelconque avec $n \geqslant 0$ et montrer que dans ce cas P_{n+1} est vraie.

On suppose P_n vraie pour un certain $n \geqslant n_0$ c'est à dire ...
On veut alors montrer que P_{n+1} est vraie c'est à dire ...
...

Rem 1. On parle aussi d'effet domino

Rem 2. Ne surtout oublier de préciser "pour $n \in \mathbb{N}$

Rem 3. Si la propriété est vrai à partir de n_0

Proposition 2 (Rédaction)

Pour mettre en place un principe de récurrence de manière claire et précise, il faut :

- Énoncer clairement les deux étapes.
- Pour l'hérédité on pourra rédiger de la manière suivante :
- Faire une conclusion du type : On a donc montré que P_n est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

Exemple 3. A l'aide du principe de récurrence, montrer les propriétés suivantes :

1. $P_n : 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $Q_n : 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et, si $n > 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n \leqslant 3$.
4. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, l'entier $4^n - 1$ est un multiple de 3.
5. L'inégalité de Bernoulli :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (1 + x)^n \geqslant 1 + nx$$
6. u_n est définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, si $n > 0$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 2$. On veut démontrer la propriété :
$$P_n : 2 \leqslant u_n \leqslant 4$$
On va étudier le cas :

(a) $u_0 = 2$ (b) $u_0 = 0$ (c) $u_0 = 5$

V 4. Ex expression

V 5. Ex monotonie

IV Méthodes pour les suites récurrentes

Méthode-exemple 1 (Démontrer $u_n > a$)

Si la fonction $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & 0,5x+5 \end{array}$ et $u_0 = -2$.

On remarque facilement que f est strictement croissante (le coefficient de x est strictement positif pour cette fonction affine)

Si l'on souhaite démontrer par récurrence la proposition $P_n : \ u_n < 10$.

Initialisation : $u_0 = -2 < 10$ donc P_0 est vrai.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que P_n vrai. C'est-à-dire que $u_n < 10$.

La fonction f étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc on obtient :

$$f(u_n) < f(10) = 10 \quad \text{donc} \quad u_{n+1} < 10$$

Donc P_{n+1} est vrai.

On a montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n < 10$

Rem 4. Dans ce cas il faudra au préalable faire l'étude de la fonction f

Méthode-exemple 2 (Monotonie de la suite (u_n))

Si la fonction $\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & 0,5x+5 \end{array}$ et $u_0 = -2$.

On remarque facilement que f est strictement croissante (le coefficient de x est strictement positif pour cette fonction affine)

Si l'on souhaite démontrer par récurrence la proposition $P_n : \ u_n < u_{n+1} < 10$.

Initialisation : On calcul $u_1 = f(u_0) = 4$.

Donc $u_0 = -2 < u_1 < 10$ donc P_0 est vrai.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que P_n vrai. C'est-à-dire que $u_n < u_{n+1} < 10$.

La fonction f étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc on obtient :

$$f(u_n) < f(u_{n+1}) < f(10) = 10 \quad \text{donc} \quad u_{n+1} < u_{n+2} < 10$$

Donc P_{n+1} est vrai.

On a montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n < u_{n+1} < 10$$

On remarque donc ici que la suite est croissante. De plus elle est majorée par 10. Donc elle converge vers une limite l avec $l \leqslant 10$.

Rem 5. Attention, ici ce n'est pas parce que la fonction f est croissante que la suite sera croissante