Complément sur les lois à densité.

On considère $X \sim \mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$, et $T \sim \mathcal{N}(0;1)$.

I Que peut-on déduire, si l'on connait $P(X \leqslant a)$.

A Détermination de a connaissant $P(X \leqslant a)$.

	avec la TI	Avec la Casio.
Trouver a avec $P(X \leqslant a) = \alpha$	"2^{nde}" et "VAR/Distrib" puis saisir : InvNormCD(α,σ,μ)	"OPTN", puis dans l'ordre "STAT", "DIST" "NORM" et "InvN" puis saisir InvNormCD(α,σ,μ)

B Déterminer μ (espérance) ou σ (écart type) connaissant $P(X \leqslant a)$.

1 Si l'on connait l'espérance : μ.

Méthode 1

Soit $X \sim \mathcal{N}(5;\sigma)$, et $P(X \leqslant 6,5) = 0,95$.
$1^{ière}$ **étape : On se "ramène" à la normale centrée réduite.**
On a $T = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{X-5}{\sigma}$ suit la loi normale centré réduite :

$$P(X \leqslant 6) = P\left(\frac{X-5}{\sigma} \leqslant \frac{6,5-5}{\sigma}\right) = P\left(T \leqslant \frac{1,5}{\sigma}\right) = 0,95$$

$2^{ième}$ **étape : Utilisation de InvNormale.**
Avec la machine $InvNormal(0.95, 1, 0) \simeq 1,6449$.
$3^{ième}$ **étape : détermination de σ.**
On obtient donc : $\dfrac{1,5}{\sigma} \simeq 1,6449 \Leftrightarrow \sigma \simeq \dfrac{1,5}{1,6449} \simeq 0,9119$

2 Si l'on connait l'écart type σ.

Méthode 2

Soit $X \sim \mathcal{N}(\mu;2)$, et $P(X \leqslant 7) = 0,9$.
$1^{ière}$ **étape : On se "ramène" à la normale centrée réduite.**
On a $T = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{X-\mu}{2}$ suit la loi normale centré réduite :

$$P(X \leqslant 7) = P\left(\frac{X-\mu}{2} \leqslant \frac{7-\mu}{2}\right) = P\left(T \leqslant \frac{7-\mu}{2}\right) = 0,9$$

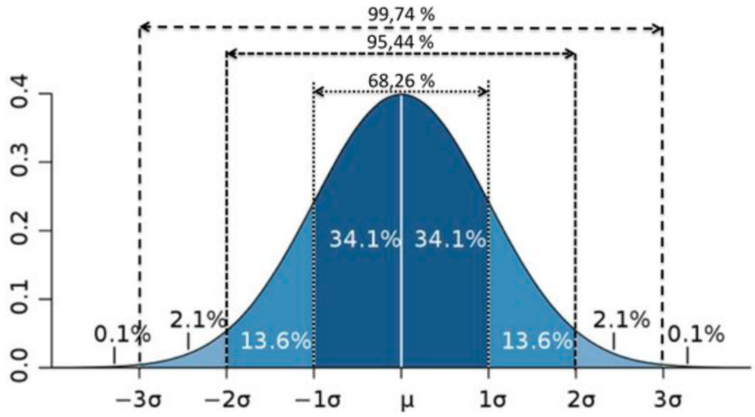
$2^{ième}$ **étape : Utilisation de InvNormale.**
Avec la machine $InvNormal(0.9, 1, 0) \simeq 1,2816$.
$3^{ième}$ **étape : détermination de μ.**
On obtient donc : $\dfrac{7-\mu}{2} \simeq 1,2816 \Leftrightarrow \sigma \simeq 7-\mu \simeq 2 \times 1,2816 = 2,5631 \Leftrightarrow \mu \simeq 7 - 2,5631 \simeq 4,437$

Remarque 1. On peut faire pareille avec $P(X \geqslant a)$.

II Cas d'un intervalle centré sur μ.

Rappel : On a les approximations :

- $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \simeq 0,68$.
- $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \simeq 0,95$. (Une formule plus exacte : $P(\mu - 1,96\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 1,96\sigma) \simeq 0,95$)
- $P(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma) \simeq 0,997$.



A Déterminer un intervalle centré.

Méthode 3

Pour déterminer un intervalle pour que *" la probabilité d'être dans cet intervalle soit de 95% ?" :* (C'est le cas le plus courant)
On considère X suivant une loi normale d'espérance 5,5 et d'écart type $1,55$. Pour déterminer un intervalle centré sur 5,5 ayant une probabilité de 95% d'être réaliser, on utilise $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \simeq 0,95$.
Dés lors $P(X \in [2,45; 8,65]) \simeq 0,95$.

Remarque 2. On obtiendra une meilleure approximation avec $P(1,96 \leqslant T \leqslant 1,96) \simeq 0,95$ et l'intervalle obtenue est alors :

$$[5,5 - 1,96 \times 1,55; 5,5 + 1,96 \times 1,55] = [2,462; 8,538]$$

B Déterminer un écart type à partir d'un intervalle centré.

Méthode 4

Soit X une variable suivant une loi normale d'espérance 7,35 et d'écart type noté σ.
Si l'on sait que la probabilité $P(6,09 \leqslant X \leqslant 8,61) = 0,95$.
$1^{ière}$ étape :
On remarque que $7,35 - 6,09 = 8,61 - 7,35 = 1,26$ donc :

$$[6,09; 8,61] = [7,35 - 1,26; 7,35 + 1,26]$$

L'intervalle est donc centré sur 7,35 l'espérance de X. Donc on utilise $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \simeq 0,95$.
Donc :

$$2\sigma = 1,26 \Leftrightarrow \sigma = 0,63$$

Remarque 3. On peut faire un peu mieux en faisant : $\sigma = \dfrac{1,26}{1,96} = 0,643$.