# Complément : suite arithmético-géométrique.

**Objectif :** Étude des suites de la forme :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = au_n + b \end{cases}$$

**Pour tester les suites étudiées avec géobébra.**

**Voici un petit programme Python pour tester les suites :**

```
def recu(a,b,n,U):
    for i in range(0,n+1):
        print("U",i,"=",U)
        U=a*U+b
    return
recu(0.3,1.4,10,-1)
```

On a **observé** les résultats suivants :

**Proposition 1** (Sur les limites. (Non exigible) )

- Si $-1 < a < 1$ alors la suite $(u_n)$ converge.
- Si $a = 1$ alors la suite $(u_n)$ est une suite arithmétique de raison $b$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ ou $-\infty$ (sauf si $u_0 = \dfrac{-b}{1-a}$ où elle est constante)
- Si $a \leqslant -1$ alors la suite $(u_n)$ diverge et n'a pas de limite (sauf si $u_0 = \dfrac{-b}{1-a}$ où elle est constante)

**Proposition 2** (Sur les variations(Non exigible))

Si $u_0 = \dfrac{-b}{1-a}$ alors la suite $(u_n)$ est constante.

On suppose maintenant que $u_0 \neq \dfrac{-b}{1-a}$ :

- Si $0 < a < 1$ et $u_0 > \dfrac{-b}{1-a}$ alors la suite $(u_n)$ est décroissante convergente.
- Si $a > 1$ et $u_0 < \dfrac{-b}{1-a}$ alors la suite $(u_n)$ est croissante divergente de limite $+\infty$ .
- Si $0 < a < 1$ et $u_0 < \dfrac{-b}{1-a}$ alors la suite $(u_n)$ est croissante convergente.
- Si $a > 1$ et $u_0 > \dfrac{-b}{1-a}$ alors la suite $(u_n)$ est décroissante divergente de limite $-\infty$ .

**Méthode-exemple 1**

Soit la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 0.3u_n + 1,4 \end{cases}$$

• $1^{ière}$ **étape :** On détermine l'intersection entre des droites d'équation $y = 0,3x + 1,4$ et $y = x$.

$$0,3x + 1,4 = x \Leftrightarrow x = \frac{1,4}{0,7} = 2$$

• $2^{ième}$ **étape :** On étudie $(v_n)$ la suite définie par $v_n = u_n - 2$ (c'est-à-dire la distance de $u_n$ à $2$). On montre que $(v_n)$ est une suite géométrique. (On devra utiliser $u_n = v_n + 2$)

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = 0,3u_n + 1,4 - 2 = 0,3u_n - 0,6 = 0,3(v_n + 2) - 0,6 = 0,3v_n$$

On a donc $v_{n+1} = 0,3v_n$. Donc la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison 0,3 et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = -1 - 2 = -3$
• $3^{ième}$ **étape :** Expression de $v_n$ en fonction de $n$ :

$$v_n = q^n v_0 = -3 \times 0,3^n$$

**Remarque :** Puisque $q = 0,3 \in ]0,1[$ et $v_0 = -3$, on sait que $(v_n)$ est croissante et comme $u_n = v_n + 2$ la suite $(u_n)$ est croissante.
• $4^{ième}$ **étape :** Expression de $u_n$ en fonction de $n$ :

$$u_n = v_n + 2 = q^n v_0 = -3 \times 0,3^n + 2$$

• $5^{ième}$ **étape :** Étude de la limite :
$q = 0,3 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,3^n = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -3 \times 0 + 2 = 2$.
On retrouve le résultat observé soit avec géogébra soit à la calculatrice.
• $6^{ième}$ **étape :** Variation : Comme $q = 0,3 \in ]0,1[$, on a $n \mapsto 0,3^n$ est décroissante. Puis $-3 \times q^n + 2$ est croissante (décomposition en fonction de référence avec -3x+2 décroissante)

**Exercice 1.** Testez la méthode précédente avec les suites suivantes (Vous pourrez au préalable utiliser Géogébra ou le petit programme Python ou la calculatrice pour avoir une intuition de la limite et de la monotonie de la suite) :

a) $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 0.5u_n + 1,5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = 0,5u_n + 1,5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n - 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 2u_n - 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = -0,9u_n + 19 \end{cases}$

**Exercice 2.** Vous pouvez construire l'exercice en choisissant vous même les valeur de $a$, $b$ et $u_0$.

On peut refaire cela de façon générale :

**Méthode-exemple 2**

Soit la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = au_n + b \end{cases}$$

Avec $a \neq 1$. (En effet si $a = 1$, la suite $(u_n)$ est simplement une suite arithmétique. On remarque d'ailleurs que si $b = 0$ la suite est géométrique et la méthode est valable mais inutile.)

• $1^{ière}$ **étape :** On détermine l'intersection entre des droites d'équation $y = ax + b$ et $y = x$.

$$ax + b = x \Leftrightarrow x = \frac{b}{1-a}$$

• $2^{ième}$ **étape :** On étudie $(v_n)$ la suite définie par $v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a}$ (c'est-à-dire la distance de $u_n$ à $\dfrac{b}{1-a}$). On montre que $(v_n)$ est une suite géométrique.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{b}{1-a} = au_n + b - \frac{b}{1-a} = au_n + b - \frac{b}{1-a} = a(v_n + \frac{b}{1-a}) + b - \frac{b}{1-a} = av_n$$

On a donc $v_{n+1} = av_n$. Donc la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison a et de premier terme $v_0 = u_0 - \dfrac{b}{1-a}$

• $3^{ième}$ **étape :** Expression de $v_n$ en fonction de $n$ :

$$v_n = q^n v_0 = \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) \times a^n$$

• $4^{ième}$ **étape :** Expression de $u_n$ en fonction de $n$ :

$$u_n = v_n + \frac{b}{1-a} = \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) \times a^n + \frac{b}{1-a}$$

**Remarque :** On peut déterminer les variations et la limite de $(v_n)$ à partir des valeurs de $v_0$ et de $a$, puisque c'st une suite géométrique. On déduira ainsi les variations et la limite de $(u_n)$.

• $5^{ième}$ **étape :** Étude de la limite : Par exemple, si $-1 < a < 1$. $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{b}{1-a}$.

• $6^{ième}$ **étape :** Variation : On fera au cas par cas.