Devoir commun de Mathématiques de 1S du 16 mai 2019

Exercice 1. 5,5 points

Une compagnie aérienne possède un avion d'une capacité de 70 passagers.
I - Lors d'un sondage, la compagnie a demandé aux 66 passagers présents, le nombre de voyages qu'ils accomplissent par avion et par an . Les résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous :

Nombre de voyages	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre de passagers	8	15	10	8	8	7	5	2	3
E.C.C	8	23	33	41	49	56	61	63	66

1. Compléter la ligne des effectifs cumulés croissants du tableau ci-dessus. 0,5 point

2. Calculer la médiane et les quartiles de cette série. Justifier brièvement par les calculs. 0,5 point sans calcul et 1 avec

   1^{ier} quartile. On a $\dfrac{66}{4} = 16,5$. Donc le premier quartile est la $17^{ième}$ valeur $Q_1 = 3$.
   La médiane. On a $\dfrac{66+1}{2} = 33,5$. Donc la médiane est la moyenne de la $33^{ième}$ valeur et de la $34^{ième}$ valeur. $Med = 3,5$.
   $3^{ième}$ quartile. On a $3\dfrac{66}{4} = 59,5$. Donc le troisième quartile est la $60^{ième}$ valeur $Q_3 = 7$.
3. Calculer l'écart-inter quartile puis interpréter le résultat.
   L'écart inter-quartile est $7 - 3 = 4$. 0,25 point

II - Les clients réservent par Internet sans obligation d'achat et sans pénalité en cas de non-présentation. La compagnie propose n places à la réservation ( ) et on suppose que les n places sont réservées mais seuls 95 % des voyageurs embarquent. Le prix du billet s'élève à 90 €. Du point de vue de la compagnie, la présence ou non d'un client à l'embarquement est une épreuve de Bernoulli et les n clients, représentent n répétitions identiques et indépendantes de cette épreuve. X est la variable aléatoire qui donne le nombre de clients qui embarquent parmi les n qui ont réservé.
A. On suppose dans cette partie que n = 70 .

1. Quelle est la loi suivie par X ? Déterminer ses paramètres n et p. 0,5 point pour la justification +0,5 pour les paramètres.
   On a répétition 70 fois d'une même expérience (pour chaque voyageur) avec deux issues possibles (soit le voyageur qui à réservé embarque (succès) soit non (échec)) de façon indépendante. Donc X le nombre de voyageur ayant réservé qui embarque suit une loi binomiale de paramètre n=70 et p=0,95.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins une place libre dans l'avion. (Arrondi au millième). 0,5 point
   $P(X \leqslant 69) = 1 - P(X = 70) = 1 - 0,95^{70} = 0,972$ au millième près. 0,5 point (l'expression) +0,25 point (la valeur approchée)
3. Déterminer l'espérance et on déduire la recette moyenne du vol.
   $E(X) = np = 70 \times 0,95 = 66,5$. Donc la recette moyenne est $66,5 \times 90 = 5985$ €. 0,5 point

B. On suppose dans cette partie que n = 80 . Si un voyageur ayant réservé arrive pour embarquer alors que l'avion est déjà complet, la compagnie lui verse 45 € en guise de dédommagement.

1. Quelle est la loi suivie par X ? Déterminer ses paramètres n et p. $X \sim \mathscr{B}(80, 0,95)$. 0,5 point
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins une place libre dans l'avion. (Arrondi au millième). 0,5 point
   $P(X \leqslant 69) \simeq 0,002$ au millième près.
3. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins un voyageur ayant réservé et ne pouvant pas embarqué. (Arrondi au millième).
   $P(X \geqslant 71) = 1 - P(X \leqslant 70) \simeq 0,993$ au millième près. 0,5 point
4. Calculer la recette moyenne du vol. (en tenant compte des dédommagements éventuels). 0,5 point

Exercice 2. Étude de fonction : 7 points

1. Soit g, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4x^2 - 4x - 24$.
   (a) Résoudre l'équation $g(x) = 0$. 1 point
   $\Delta = 16 + 4 \times 4 \times 24 = 400 = 20^2$. Donc $x_1 = \dfrac{4-20}{2\times 4} = -2$ et $x_2 = \dfrac{4+20}{2 \times 4} = 3$.
   (b) En déduire la forme factorisée de l'expression de $g(x)$.
   Donc $g(x) = a(x - x - 1)(x - x_2) = 4(x - 2)(x - 3)$. 0,5 point

2. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{-2x+1}{2x^2+12}$$

   (a) Expliquer pourquoi cette fonction est bien définie pour toute valeur réelle de x. 0,5 point
   Pour le dénominateur $x^2 \geqslant 0$ donc $2x^2 + 12 \geqslant 12$. Donc le dénominateur ne s'annule pas et il n'y a pas de valeur interdite.

   (b) Donner l'écriture fractionnaire simplifiée de $f(-2)$. Les calculs intermédiaires doivent apparaître sur votre copie. 0,5 point
   $f(-2) = \dfrac{5}{20} = \dfrac{1}{4}$.

3. (a) Démontrer que l'expression de sa dérivée est : 1 point

$$f'(x) = \frac{-2 \times (2x^2+12) - (-2x+1) \times 4x}{(2x^2+12)^2} = \frac{-4x^2 - 24 + 8x^2 - 4x}{(2x^2+12)^2} = \frac{g(x)}{(2x^2+12)^2}$$

   (b) Étudier les signes de $f'(x)$. On présentera la réponse sous la forme d'un tableau des signes. 1 point
   $g(x)$ est un polynôme du second degré qui donc positif (signe de a) à l'extérieur des racines (ici 2 et 3).
   On a $(2x^2+12)^2 > 0$.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$(2x^2+12)^2$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   (c) En déduire le tableau des variations de f (ne pas oublier d'y inscrire les extrema locaux) 1 point

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	$\frac{1}{4}$	↘	$\frac{-1}{6}$	↗	

4. On note T la tangente à la courbe représentative de la fonction f, au point d'abscisse 2.

   (a) Justifier que la valeur du coefficient directeur de T est $-0,04$. 0,5 point
   Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 2 est :

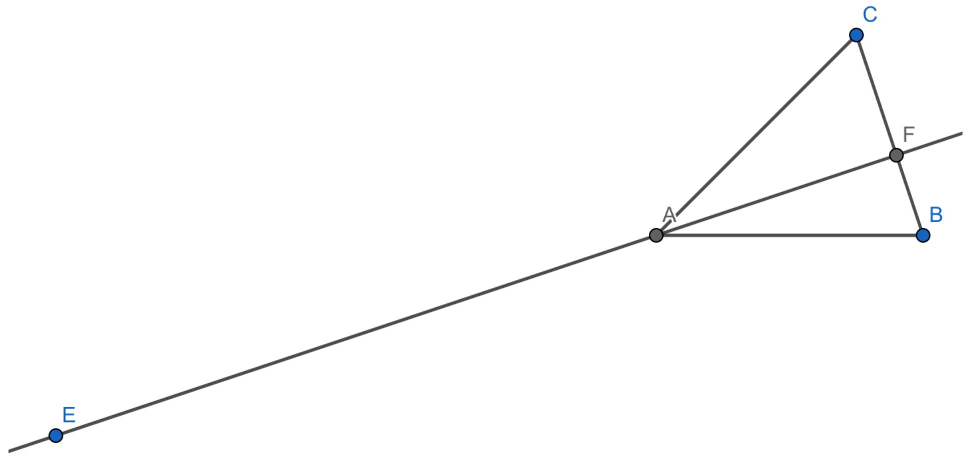
$$f'(2) = \frac{g(2)}{(2 \times 2^2 + 12)^2} = \frac{-16}{400} = -0,04$$

   (b) Donner l'équation réduite de T, puis une équation cartésienne. 1 point
   $y = f'(2)(x-2) + f(2) = -0,04(x-2) - 0,15 = -0,04x - 0,07$.

Exercice 3. 3,5 points

On considère un triangle ABC et les points E et F tel que : $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{BF} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{BC}$.

1. Faire une figure avec le triangle ABC et les points E, F. 0,5 point



2. Déterminer les coordonnées des points E et F dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. 1 point=0,25+0,75
   Comme $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$, on a $E(-2; -1)$.
   $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Donc $F\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$
3. Montrer que les points A, E et F sont alignés. 0,5 point
   $$Det(\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{AF}) = \begin{vmatrix} -2 & \frac{2}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{-2}{3} + \frac{2}{3} = 0$$
4. Déterminer l'équation des droites (AE) et (BC) dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. 1 point
   $$M(x, y) \in (AE) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AE} \quad \text{colinéaires} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & -2 \\ y & -1 \end{vmatrix} = -x + 2y = 0$$
   $$M(x, y) \in (BC) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \text{ et } \overrightarrow{BC} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ y & 1 \end{vmatrix} = x + y - 1 = 0$$
5. Déterminer l'intersection des droites (AE) et (BC). 0,5 point
   On vérifie facilement que les coordonnées du point F vérifient les équations précédentes. Donc f appartient aux deux droites et $F = (AE) \cap (BF)$

Exercice 4. 5,5 points

Depuis 2010, Marceau dépose chaque année au premier janvier la somme de 1000 € sur un compte rémunérer à 2,5 % par an (Plan Épargne Logement : PEL) . On note S_n la somme sur le compte au premier janvier de l'année $2010 + n$. Donc $S_0 = 1000$.

1. Montrer que $S_1 = 2025$ € et $S_2 = 3075,625$ €.
   $S_1 = 1000 \times \underbrace{1 + 0,025}_{\text{Augmentation de 2,5 \%}} + \underbrace{1000}_{\text{Somme déposée en 2011}} = 2025$ € et $S_2 = 2025 \times \underbrace{1 + 0,025}_{\text{Augmentation de 2,5 \%}} + \underbrace{1000}_{\text{Somme déposée en 2012}} =$ $3075,625$ € 0,5 point
2. Étude d'une suite intermédiaire. On considère ici un épargnant qui dépose à l'année 0, la somme de 1000 euros sur un compte rémunéré à 2,5 %. Ensuite, on considère qu'il ne dépose plus d'argent sur ce compte. On note u_k la somme sur ce compte au bout de k années.
   (a) Déterminer l'expression de u_{k+1} en fonction de u_k et déterminer la nature de la suite.
   $u_{k+1} = \underbrace{u_k}_{\text{Somme à l'année précédente}} \times \underbrace{1,025}_{\text{augmentation de 2,5 \%}}$. 0,5 point
   Donc (u_k) est une suite géométrique de raison 1,025 et de premier terme 1000 € 0,5 point
   (b) En déduire l'expression de u_k en fonction de k.
   Donc $u_k = u_0 \times q^k = 1000 \times 1,025^k$. 0,5 point
   (c) Montrer que $u_{10} \simeq 1280$ € si l'on arrondi le résultat à l'euro près.
   $u_{10} = 1000 \times 1,025^{10} \simeq 1280$ € 0,5 point
3. Expliquez pourquoi l'on peut considérer que : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$
   u_k étant la somme obtenue pour un placement de 1000 € durant k année, c'est ce que permet d'obtenir le placement des 1000 € placer à l'année $2010 + n - k$ le premier janvier 2010+n. (par exemple u_n est la somme obtenue pour le placement des 1000 € en 2010) 0,5 point

4. Déterminer la somme dont disposera Marceau au premier janvier de l'année 2028. 1 point

$$S_18 = u_0 + u_1 + ... + u_18 = 1000 \times 1,025^0 + 1000 \times 1,02^1 + 1000 \times 1,05^2 + ... + 1000 \times 1,025^{18}$$
$$= 1000(1,025^0 + 1,02^1 + 1,05^2 + ... + 1,025^{18}) = 1000\frac{1,025^{19} - 1}{1,025 - 1} \simeq$$

5. On souhaite écrire un programme permettant de déterminer à partir de quelle année Marceau est censé avoir sur son compte plus de 40000 €. Pour cela recopier et compléter le programme ci-dessous : 1 point

```
U=1000
S=1000
N=0
while S<40000:
    U=U*1,025
    S=S+U
    N=N+1
print(N)
```

6. Déterminer justement l'année à partir de laquelle Marceau disposera de plus de 4000 €. 0,5 point