Correction du DM du 31 mars 2019.

Pour installer Python sur votre PC : `https://fr.wikihow.com/installer-Python`

1 Partie 1.

Exercice 1. Soit l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé à 4 faces.

1. Compléter le tableau ci-dessous :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	1		Valeurs : xi	1	2	3	4	Somme	
2	4		Effectif ni	229	233	265	273	1000	
3	2		Fréquence : fi	0,229	0,233	0,265	0,273	1	
4	2		Produit : xi*fi	0,229	0,466	0,795	1,092	2,582	Variance
5	3		Produit : xi^2*f	0,229	0,932	2,385	4,368	7,914	1,247276
6	4								

Donner donc la moyenne des valeurs obtenues : 2,582 .

Donner la variance de cette série : 1,247276 .

2. Si l'on note X la variable aléatoire donnant le résultat obtenu lors du lancer.
Compléter donc le tableau suivant donnant la **loi de probabilité** de X :

Valeur : x_i	1	2	3	4	Somme
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1
$x_i \times P(X = x_i)$	$1 \times \frac{1}{4}$	$2 \times \frac{1}{4}$	$3 \times \frac{1}{4}$	$4 \times \frac{1}{4}$	$\frac{5}{2}$
$x_i^2 \times P(X = x_i)$	$1 \times \frac{1}{4}$	$2^2 \times \frac{1}{4}$	$3^2 \times \frac{1}{4}$	$4^2 \times \frac{1}{4}$	$\frac{15}{2}$

Donnez l'espérance et la variance de cette variable :

$$E(X) = \frac{5}{2} \qquad \text{et} \qquad V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{15}{2} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

On remarque que les valeurs statistiques obtenues à la question 1 sont proches des valeurs probabilistes obtenues lors de la deuxième question. Plus on augmente le nombre de simulation plus ces valeurs sont proches.

Exercice 2. Soit l'expérience aléatoire qui consiste encore à lancer un dé à 20 faces mais un peu particulier avec :

- 3 faces avec "1".
- 7 faces avec "2".
- 10 faces avec "3".

On fera 1000 simulations

1. Compléter le tableau ci-dessous :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	1	1		Valeurs : xi	1	2	3	Somme	
2	11	3		Effectif ni	133	332	535	1000	
3	11	3		Fréquence : fi	0,133	0,332	0,535	1	
4	10	2		Produit : xi*fi	0,133	0,664	1,605	2,402	Variance
5	7	2		Produit : xi^2*fi	0,133	1,328	4,815	6,276	0,506396
6	13	3							

Ex 1 | Ex 2 | Ex 3 | +

Donner donc la moyenne et la variance des valeurs obtenues : $\overline{x} \simeq 2,402$ et $V(x) \simeq 0,506396$

2. Si l'on note X le résultat obtenu lors du lancer. Si l'on cherche la probabilité que l'on obtienne la valeur "2", cette probabilité est $\dfrac{7}{20}$ (c'est-à-dire 7 chance "sur" 20). Compléter donc le tableau suivant :

Valeur : x_i	1	2	3	Somme
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{1}{2}$	1
$x_i \times P(X = x_i)$	$\frac{3}{20}$	$\frac{14}{20}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{47}{20}$
$x_i^2 \times P(X = x_i)$	$\frac{3}{20}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{121}{20}$

Comme à l'exercice précédent, déterminer l'espérance et la variance de la variable X.

$$E(X) = \frac{47}{20} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{121}{20} - \left(\frac{47}{20}\right)^2 = \frac{211}{400} = 0,5275$$

Comme précédemment, on remarque que les valeurs statistiques obtenues à la question 1 sont proches des valeurs probabilistes obtenues lors de la deuxième question. Plus on augmente le nombre de simulation plus ces valeurs sont proches.

Exercice 3. On considère ici une pièce mal équilibrée dont la probabilité d'obtenir face (évènement noté F) est de $\dfrac{1}{3}$ et celle d'obtenir pile (évènement noté P) est donc de $\dfrac{2}{3}$. On décide de lancer cette pièce deux fois. On note X le nombre de fois où l'on obtient face lors de ces deux lancers.

1. Vous compléterez le tableau suivant :

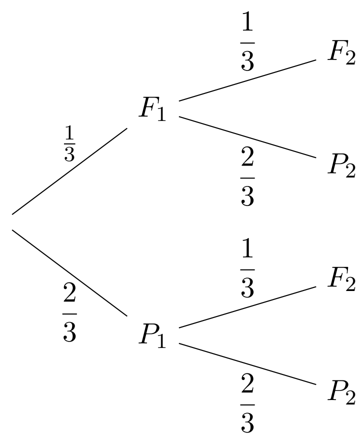
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	0	0	0		Valeurs : xi	0	1	2	Somme	
2	0	0	0		Effectif ni	418	447	135	1000	
3	0	0	0		Fréquance : fi	0,418	0,447	0,135	1	
4	1	0	1		Produit : xi*fi	0	0,447	0,27	0,717	Variance
5	1	1	2		Produit : xi^2*fi	0	0,447	0,54	0,987	0,472911
6	0	0	0							

Ex 1 | Ex 2 | Ex 3 | +

Cellule	$F2$	$F3$	$F4$	$I2$
Formule.	$= NB.SI(\$C : \$C; F1)$	=F2/$I2	=F1*F3	=somme(F2 :H2)

2. Donner la moyenne et la variance obtenue lors de cette simulation.
La moyenne est de 0,717 et la variance d'environ 0,472911.

3. Compléter l'arbre si dessous modélisant l'expérience aléatoire.



Compléter le tableau ci-dessous :

Valeur : x_i	0	1	2	Somme
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	1
$x_i \times P(X = x_i)$	0	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{3}$
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	1
$x_i^2 \times P(X = x_i)$	0	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{9}$

Comme à l'exercice précédent, déterminer l'espérance de la variable X.
On a $E(X) = \dfrac{2}{3}$ et $V(X) = \dfrac{4}{9}$

Comme précédemment, on remarque que les valeurs statistiques obtenues à la question 1 sont proches des valeurs probabilistes obtenues lors de la deuxième question. Plus on augmente le nombre de simulation plus ces valeurs sont proches.

Exercice 4. Répondre aux mêmes questions que l'exercice précédant à partir de la question 2.
Ici on trouvera $E(X) = 1$ et $V(X) = \dfrac{2}{3}$.

Exercice 5. On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé à 6 faces jusqu'à obtenir la valeur "1". On note X la variable aléatoire qui donne ce nombre de lancers.
Cette fois-ci sur EduPython, écrire une procédure qui permet de simuler 100 fois cette expérience et qui permet d'obtenir le nombre moyen de lancers nécessaires pour obtenir "1". (Vous pourrez améliorer cette procédure en déterminant aussi la variance de cette série)

```
import random
U=0
S=0
M=10000
for i in range(0,M):
    X=random.randint(1,6)
    while X>1:
        U=U+1
        X=random.randint(1,6)
    S=S+U+1
    U=0
moyenne=S/M
print("le nombre moyen de lancers nescessaire est : ",moyenne)
```

2 Partie 2.

Exercice 1. La grand mère de Philémon lui a donné en 2010 une somme de 100 € pour noël. Puis chaque année elle augmente cette somme de 10 € (elle lui donnera donc en 2011 la somme de 110 €, puis 120 € en). Philémon garde ces sommes dans une boîte.

Partie A

1. Écrire un programme Python qui permet de déterminer la somme que donne la grand mère en 2018.
2. Améliorer cette procédure afin qu'elle permette aussi d'obtenir la somme dont dispose Philémon dans la boîte.

```
Usomme=100
N=8
Sommetotale=100
for i in range(0,N):
    Usomme=Usomme+10
    Sommetotale=Sommetotale+Usomme
print("la somme donnee par la grand mere en ",2010+N,"est : ",Usomme)
print("Et la somme sur le compte de Philemon est : ",Sommetotale)
```

3. Expliquez pourquoi la suite (u_n) modélisant cette situation est une suite arithmétique et retrouver par les formules connues sur les suites arithmétiques les résultats obtenus par la procédure précédente.
   On obtient : $u_{n+1} = u_n + 10$ (la somme de l'année précédente augmentée de 10 €)) donc (u_n) est une suite arithmétique de raison 10 et de premier terme $u_0 = 100$ €. Donc :

$$u_n = u_0 + n \times 10 = 100 + 10n$$

   Donc $u_8 = 180$ €. Par ailleurs :

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + ... + u_n &= 100 + (100 + 10) + (100 + 2 \times 10) + ... + (100 + 10n) \\ &= \underbrace{100 + 100 + ... + 100}_{(n+1)\ fois} + 10 \times (0 + 1 + 2 + ... + n) \\ &= 100(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

   Donc $S_8 = 9 \times 100 + 10 \times \dfrac{8 \times 9}{2} = 1350$ €.

Partie B

La grand mère avait hésité en 2011 avec deux types d'augmentation :

- Comme prévu à la partie A et modélisé par la suite (u_n).
- Ou une augmentation de 8 % par an. Solution que l'on modélisera par la suite (v_n).

Écrire une procédure qui permet de comparer chaque année jusqu'en 2030, les sommes versées par la grand mère pour les deux types d'augmentation ainsi que les sommes présentent dans la boîte dans les deux cas.

```
Uopt1=100
Uopt2=100
N=30
Somtotopt1=100
Somtotopt2=100
for i in range(0,N+1):
    if Uopt1<=Uopt2:
        print("option 1 en ",2010+i,"est donnee : ",Uopt1,
        "ce qui inferieur a option 2 : ",Uopt2)
```

```
        if Somtotopt1>=Somtotopt2:
            print("par ailleurs le total donne avec otion 1 :",Somtotopt1,
            "reste superieur a option 2 :  "
            ,Somtotopt2)
        else:
            print("le totat obtenu avec option 1 : ",Somtotopt1,
            "est aussi inferieur a option 2 : ",Somtotopt2)
    else:
        print("option 1 en ",2010+i,"est donnee : ",Uopt1,
        "ce qui superieur a option 2 : ",Uopt2)
        print("le total donne avec option 1 :",Somtotopt1,
        "reste superieur a option 2 : ",Somtotopt2)
    Uopt1=Uopt1+10
    Somtotopt1=Somtotopt1+Uopt1
    Uopt2=Uopt2*1.08
    Somtotopt2=Somtotopt2+Uopt2
```

Partie C

Exprimer en fonction de $n \in \mathbb{N}$ les expressions de u_n et v_n ainsi que : $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \qquad et \qquad V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.

$u_{n+1} = u_n + 10$ et :

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + ... + u_n &= 100 + (100 + 10) + (100 + 2 \times 10) + ... + (100 + 10n) \\ &= \underbrace{100 + 100 + ... + 100}_{(n+1)\ fois} + 10 \times (0 + 1 + 2 + ... + n) \\ &= 100(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Comme $v_{n+1} = v_n \times 1.08$, la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 1,08 et de premier terme $v_0 = 100$. On obtient :

$$v_n = 1,08^n \times 100$$

Par ailleurs pour la somme des termes :

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + ... + u_n &= 100 + 100 \times 1,08 + 100 \times 1,08^2 + ... + 100 \times 1,08^n \\ &= 100 \times \left(1 + 1,08 + 1,08^2 + ... + 1,08^n\right) \\ &= 100 \times \frac{1,08^{n+1} - 1}{1,08 - 1} = 1125 \times \left(1,08^{n+1} - 1\right) \end{aligned}$$

Exercice 2. On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right) \end{cases}$$

Cet algorithme est l'algorithme de Héron pour déterminer une approximation de la racine carré de a.

Partie A

1. Écrire une procédure permettant d'obtenir les 20 premiers termes de cette suite pour $a = 2$ puis $a = 3$ puis enfin pour $a = 5$.

```
a=2
U=a
N=20
for i in range(0,N):
        print("Le terme U",i,"vaut : ",U)
        U=0.5*(U+a/U)
```

2. Comparez ces résultats avec les valeurs de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$.
   Par cette procédure, on obtient des valeurs approché de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$.

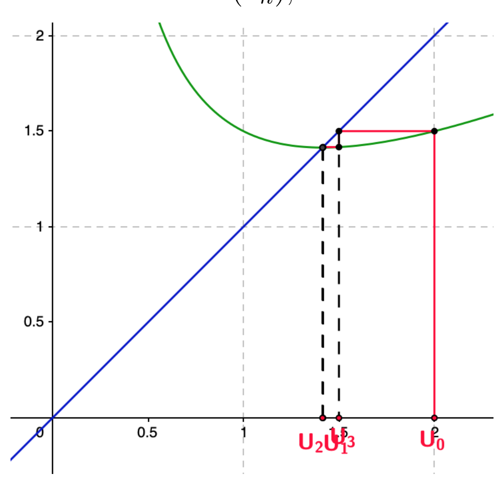
Partie B

3. On définie la fonction f sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :
$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$
   On a donc $u_{n+1} = f(u_n)$
   (a) Déterminer $f'(x)$, étudier son signe et dresser le tableau de variation de f sur $[1, 2]$.
$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{x^2}\right) = \frac{x^2-2}{2x^2} = \frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{2x^2}$$
   Le dénominateur étant positif (sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a $2x^2 > 0$), $f'(x)$ est du signe du numérateur qui est un polynôme du second degré de racines $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$. Le signe de polynôme est positif ($a = 1 > 0$) à "l'extérieur" des racines, donc :

x	0		1		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖		$-$		0		$+$		
$f(x)$	‖	↘	$\frac{3}{2}$	↘	$\sqrt{2}$	↗	$\frac{3}{2}$	↗	

   (b) Vérifier que $\sqrt{2} \leqslant u_1 \leqslant u_0$ et en utilisant le tableau de variation précédent, comparez $\sqrt{2}$, $f(u_1)$ et $f(u_0)$, puis $\sqrt{2}$, u_2 et u_1.
   Puisque $u_1 = f(u_0) = f(2) = \frac{3}{é}$, on a $\sqrt{2} \leqslant u_1 \leqslant u_0$.
   D'après le tableau de variation, comme $\sqrt{2} \leqslant u_1 \leqslant u_0 = 2$ et que sur l'intervalle $[\sqrt{2}, 2]$ la fonction f est croissante, on obtient : $f\left(\sqrt{2}\right) \leqslant f(u_1) \leqslant f(u_0)$, donc $\sqrt{2} \leqslant u_2 \leqslant u_1$. (puisque $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, et $f(u_1) = u_2$ et $f(u_0) = u_1$)
   (c) On suppose cette fois que pour un $n \in \mathbb{N}$ on a $\sqrt{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$. Justifier que $\sqrt{2} \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$.
   Comme f est croissante sur $[\sqrt{2}, +\infty[$, on obtient : $f(\sqrt{2}) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$ donc $\sqrt{2} \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$.
4. On considère la droite d (appelée première bissectrice) dont l'équation est $y = x$.
   (a) Sur un même graphique représentez la fonction f et la droite d sur l'intervalle $[1; 2]$.
   (b) Vous utiliserez les tutoriels :
   - `https://www.youtube.com/watch?v=vsi4JWESSH0`
   - `https://www.youtube.com/watch?v=J4K0Z83QMo0`

   pour représenter les premiers termes de la suite (u_n), comme dans ces vidéos.



(c) Conjecturer la variation de la suite (u_n) ainsi que la limite de cette suite.
La suite semble décroissante et converger vers la valeur $\sqrt{2}$.

Exercice 3. Suite de Fibonacci.

$$\mathcal{F}_{n+2} = \mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_n$$

```
Un0=0
Un1=1
N=20
for i in range(2,N):
    a=Un1
    Un1=Un1+Un0
    Un0=a
    print("Le nombre de couple adulte au ",i,"eme mois : ",Un1)
```