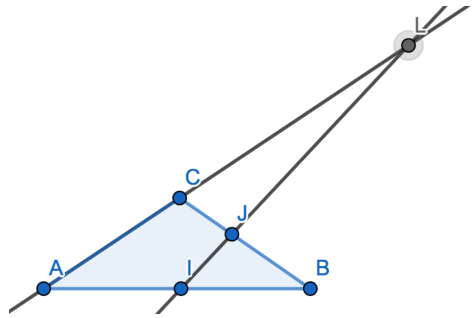
# DM géométrie plane du 15 octobre 2018.

**Ex 36 page 171**




b) Comme I est le milieu de $[AB]$ on a l'égalité vectorielle $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Donc :

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{10}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$$

Pour le calcul de $\overrightarrow{JL}$ :

$$\overrightarrow{JL} = \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AL} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AC} = -\frac{3}{5}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) - \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{12}{5}\overrightarrow{AC}$$

c) On remarque que :

$$4\overrightarrow{IJ} = 4 \times \left(-\frac{1}{10}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}\right) = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{12}{5}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{JL}$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{JL}$ sont colinéaires. Donc les points $I$, $J$ et $L$ sont alignés.

**Ex 47 page 174**

a) $ABCD$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Donc :

$$\overrightarrow{AM} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AC} = -\frac{2}{5}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$$

Donc les coordonnées du point sont $M\left(-\frac{2}{5}; -\frac{2}{5}\right)$

b) Puisque $E$ symétrique de $B$ par rapport à $M$, on a $\overrightarrow{BE} = 2 \times \overrightarrow{BM}$. Donc :

$$\begin{pmatrix} x_E - x_B \\ y_E - y_B \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_M - x_B \\ y_M - y_B \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_E - 1 \\ y_E - 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -\frac{2}{5} - 1 \\ -\frac{2}{5} - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{14}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E - 1 = -\frac{14}{5} \\ y_E = -\frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = -\frac{9}{5} \\ y_E = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

Donc les coordonnées du point sont $E\left(-\frac{9}{5}; -\frac{4}{5}\right)$.

c) Des données de l'énoncé on obtient :

$1^{ière}$ **Méthode :**

- Comme $G \in (AD)$, on a $x_G = 0$.
- On a $F \in (DC)$ et $(DC)//(AB)$, donc $y_F = y_D = 1$.
- Par construction $(EF)//(AD)$ et $(AD) = (DG)$, donc $(EF)//(DG)$.
  De même, on montre que $(FD)//(EG)$.
  Donc le quadrilatère $EGDF$ est un parallélogramme. Donc $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GD}$.

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GD} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_F - x_E \\ y_F - y_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_D - x_G \\ y_D - y_G \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_F + \frac{9}{5} \\ 1 + \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 1 - y_G \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F = -\frac{9}{5} \\ y_G = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$2^{ième}$ **Méthode : bien plus efficace !!!**

- Comme $G \in (AD)$, on a $x_G = 0$. Par construction $(EG)//(CD)//(AB)$. Donc $y_G = y_E = -\frac{4}{9}$.
- On a $F \in (DC)$ et $(DC)//(AB)$, donc $y_F = y_D = 1$. Par construction $(EF)//(AD)$. Donc $x_F = x_E = -\frac{9}{5}$.

Donc $G\left(0; \frac{-4}{5}\right)$ , $F\left(\frac{-9}{5}; 1\right)$ et $M\left(\frac{-2}{5}; \frac{-2}{5}\right)$.

On a $\overrightarrow{GM} : \begin{pmatrix} x_M - x_G \\ y_M - y_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GF} : \begin{pmatrix} \frac{-9}{5} \\ \frac{9}{5} \end{pmatrix}$. Donc $\overrightarrow{GF} = \dfrac{2}{9}\overrightarrow{GM}$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{GF}$ et $\overrightarrow{GM}$ sont donc colinéaires. Donc les points $G$, $M$ et $F$ sont alignés.

**Ex 72 page 180**

$$A(0;1) \quad ; \quad B(5;-2) \quad ; \quad C(3;4)$$

1. d médiatrice de $[AB]$.
   (a) On obtient :
   $$MA^2 = (x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2 = (0-x)^2 + (1-y)^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1$$
   De même :
   $$MB^2 = (x_B - x_M)^2 + (y_B - y_M)^2 = (5-x)^2 + (-2-y)^2 = x^2 - 10x + y^2 + 4y + 29$$
   (b) Pour déterminer l'équation de la droite d :
   $$M \in d \Leftrightarrow MA = MB \underbrace{\Leftrightarrow}_{car\ >0} MA^2 = MB^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 10x + y^2 + 4y + 29$$
   Donc $d : 10x - 6y - 28 = 0$ (Á partir de l'égalité précédente.) Cette équation est équivalente à $d : 5x - 3y - 14 = 0$
2. De même (puisque $MC^2 = (3-x)^2 + (4-y)^2 = x^2 - 6x + y^2 - 8y + 25$) :
   $$M \in D' \Leftrightarrow MA = MC \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + y^2 - 8y + 25 \Leftrightarrow 6x + 6y - 24 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x + y - 4 = 0}_{d'}$$
3. Comme le centre du cercle circonscrit est l'intersection des médiatrices, pour déterminer ses coordonnées, on doit résoudre :
   $$\begin{cases} 5x - 3y - 14 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} L1 + 3L2 \\ 5L2 - L1 \end{matrix} \begin{cases} 8x - 26 = 0 \\ 8y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{4} \\ y = \frac{3}{4} \end{cases}$$
   Pour déterminer le rayon, il suffit de calculer une des trois longueurs O'A ou O'B ou O'C (en notant O' le centre du centre).
   $O'A = \sqrt{\left(\frac{13}{4} - 0\right)^2 + \left(\frac{3}{4} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{169}{16} + \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{170}}{4}$