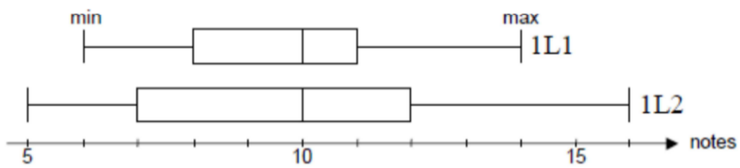
Devoir sur table 1S du 1 février.

Exercice 1. On veut comparer les résultats obtenus en français au premier trimestre pour les élèves des classes de 1L1 et 1L2. On a obtenu les diagrammes en boite ci-dessous :



1. Déterminer les valeurs statistiques que l'on peut déduire de ces deux diagrammes.

	Minimum	1^{ier} Quartile	Médiane	$3^{ième}$ Quartile	Maximum
1L1	6	8	10	11	14
1L2	5	7	10	12	16

2. Commenter les résultats des deux classes.
   Les médianes étant identique, on dira que les deux classes ont un niveau similaire.
   Par ailleurs, l'écart inter-quartile est bien super pour la 1L2 ($\Delta Q = 5$) que pour la 1L1 ($\Delta Q = 3$) ainsi que l'étendu. La classe de 1L2 à donc un profil plus hétérogène que la classe de 1L1.

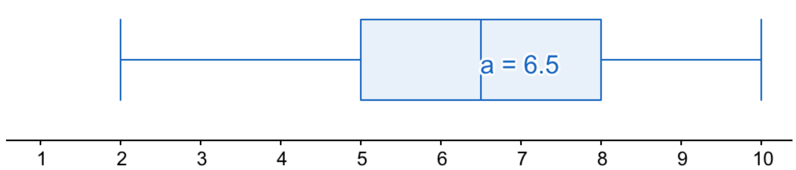
Exercice 2. Le club de basket organise un concours de lancés à 3 points. Les participants doivent faire 10 lancés à différents endroit de la ligne des 3 points. Sur les 100 premiers participants voici les résultats :

Nb de lancés réussis : x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nb de participants : n_i	0	0	2	6	7	15	20	20	15	10	5

Déterminer les valeurs de la série statistique (Quartiles, médiane, moyenne, écart type, écart inter-quartile, étendu...). Vous pourrez utiliser les résultats donnés par la calculatrice.
Puis dessiner le diagramme en boite de cette série.

Minimum	1^{ier} Quartile	Médiane	$3^{ième}$ Quartile	Maximum	Moyenne.	Écart type.
2	5	6,5	8	10	6,45	1,89

On obtient le diagramme en boite :



Exercice 3. On considère la série statistique X suivante :

x_i : valeurs	a	b	9
n_i : effectifs	1	2	3

Partie A

Dans cette partie, les valeurs sont $a = 1$ et $b = 7$.

1. Déterminer les valeurs de la moyenne et de l'écart type (à 10^{-2} près).
   La moyenne est $\overline{X} = 7$ et l'écart type est $\sigma(X) = \sqrt{8} \simeq 2,83$ à 10^{-2} près.

2. On définie la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} n_i(x_i - x)^2 = \frac{(1-x)^2 + 2(7-x)^2 + 3(9-x)^2}{3}$$

(a) Montrer que :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} n_i(x_i - x)^2 \\ &= \frac{(1-x)^2 + 2(7-x)^2 + 3(9-x)^2}{3} \\ &= \frac{1 - 2x + x^2 + 2(49 - 14x + x^2) + 3(81 - 18x + x^2)}{3} \\ &= \frac{6x^2 - 84x + 342}{3} \\ &= 2x^2 - 28x + 114 \end{aligned}$$

(b) Dresser le tableau de variation de f.

$$f(x) = 4x - 28 \geqslant 0 \Leftrightarrow 4x \geqslant 28 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{28}{4} = 7$$

x	$-\infty$		7		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	16	$\nearrow$	$+\infty$

(c) En déduire que f admet un extremum, donner la valeur de cet extrémum et la valeur pour laquelle il est atteint. Que représente ces deux valeurs pour la série X.
D'après le tableau de variation de f, elle admet un minimum en $x = 7$, Or 7 étant la moyenne on reconnait en $\frac{1}{2}f(7) = \frac{(1-7)^2 + 2(7-7)^2 + 3(9-7)^2}{6} = 8$, la valeur de la variance de X.

Partie B

Déterminer les valeurs de a et b pour que

$$\overline{X} = 6 \qquad et \qquad V(X) = 13$$

On détermine les valeurs de :

$$\left\{\begin{aligned} \overline{X} &= \frac{a + 2b + 3\times 9}{6} = 6 \\ V(X) &= \frac{a^2 + 2b^2 + 3\times 9^2}{6} - 6^2 = 13 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a + 2b + 27 = 36 \\ a^2 + 2b^2 + 243 = 49\times 6 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a = 9 - 2b \\ (9-2b)^2 + 2b^2 = 51 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a = 9 - 2b \\ 81 - 36b + 6b^2 = 51 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a = 9 - 2b \\ 30 - 36b + 6b^2 = 0 \end{array}\right.$$

On a $30 - 36b + 6b^2 = 0 \Leftrightarrow 15 - 18b + 3b^2$. On résout l'équation du second degré $\Delta = 144$.

$$\begin{cases} b_1 = \dfrac{18+12}{2\times 3} = 5 \quad et \quad a_1 = 9 - 2\times 5 = -1 \\ b_1 = \dfrac{18-12}{2\times 3} = 1 \quad et \quad a_1 = 9 - 2\times 1 = 7 \end{cases}$$

On obtient donc deux solutions :

$$S = \{(-1,5);(7,1)\}$$

Exercice 4. Un propriétaire de manège propose à ses habitués une carte de 10 € permettant d'obtenir le carnet de 10 tickets à 7 €. Il fait une étude sur 100 clients. On note X la série statistique donnant le nombre de carnet de 10 tickets acheté par client. On obtient :

$$\overline{X} = 6 \qquad et \qquad \sigma(X) = 2$$

C'est à dire que chaque client achète en moyenne 6 carnets et l'écart type de la série est 2.
On note Y la série donnant la somme dépensée par client.

1. Déterminer la moyenne et l'écart type de la série Y.
   On obtient :
   $$Y = \underbrace{7}_{prix\ du\ carnet} \times \underbrace{X}_{nb\ de\ carnets\ vendus} + \underbrace{10}_{prix\ de\ la\ carte}$$
   Donc :
   $$\overline{Y} = \overline{7X+10} = 7\times\overline{X} + 10 = 7\times 6 + 10 = 52 \quad et \quad \sigma(Y) = \sigma(7X+10) = |7|\times\sigma(X) = 7\times 2 = 14$$
2. Le propriétaire finalement décide de changer le tarif de la carte et le tarif des carnets (pour ceux qui achètent la carte bien sûr).
   (a) En faisant comme si la série X était inchangée avec ces nouveaux tarifs, on obtiendrait par cette nouvelle série Z des sommes dépensées
   $$\overline{Z} = 48 \qquad et \qquad \sigma(Z) = 12$$
   Déterminer le nouveau prix de la carte et le prix proposé par carnet avec cette carte.
   Si on note a le prix du carnet et b le prix de la carte, on obtient $Z = aX + b$. On obtient le système :
   $$\begin{cases} \overline{Z} = \overline{aX+b} = a\overline{X} + b = a6 + b = 48 \\ \sigma(Z) = \sigma(aX+b) = |a|\sigma(X) = 2|a| = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \quad et \quad b = 48 - 6a = 48 - 6\times 6 = 12 \\ ou \\ a = -6 \quad et \quad b = 48 - 6a = 48 + 6\times 6 = 84 \end{cases}$$
   Bien sûr la deuxième solution est aberrante puisque le prix de la carte est positif donc la seule solution viable est un prix de carte à 12 € et le prix du carnet à 12 €
   (b) Finalement, avec ses nouveaux tarifs les clients ont modifiés leur habitude d'achat et les clients dépensent en moyenne maintenant 50 €. Déterminer le nombre moyen de carnets de 10 tickets achetés par les clients.
   On a $\overline{Z} = 6\overline{X} + 12 = 50 \Leftrightarrow \overline{X} = \dfrac{50-12}{6} = \dfrac{19}{3} \simeq 6,33$ carnets achetés en moyenne.

Exercice 5. 1. Déterminer la mesure principale des angles :
   (a) $\dfrac{15\pi}{4} = \dfrac{-\pi}{4}\ (2\pi)$
   (b) $\dfrac{-127\pi}{3} = \dfrac{-126\pi}{3} - \dfrac{\pi}{3} = -42\pi - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{3}(2\pi)$
   (c) $\dfrac{97\pi}{6} = \dfrac{96\pi}{6} + \dfrac{\pi}{6} = 16\pi + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6}\ (2\pi)$
   (d) $\dfrac{-110\pi}{3} = \dfrac{-108\pi}{3} - \dfrac{2\pi}{3} = -16\pi - \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{-2\pi}{3}\ (2\pi)$
2. Déterminer la valeur de :

(a) $\cos\left(\dfrac{15\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{-\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(b) $\sin\left(\dfrac{-127\pi}{3}\right) = \sin\left(\dfrac{-\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(c) $\sin\left(\dfrac{97\pi}{6}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$

(d) $\cos\left(\dfrac{-110\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{-2\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$

3. Exprimer les expressions suivante en fonction de $\cos x$ ou de $\sin x$:

(a) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

(b) $\sin(\pi - x) = \sin x$

(c) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

(d) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right) = -\sin x$

4. Résoudre les équations suivantes :

(a) $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4}\ (2\pi) \\ x = \dfrac{-\pi}{4}\ (2\pi) \end{array}\right.$

(b) $\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3}\ (2\pi) \\ 3x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}\ (2\pi) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x = 0\ (2\pi) \\ 3x = \dfrac{\pi}{3}\ (2\pi) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0\ \left(\dfrac{2\pi}{3}\right) \\ x = \dfrac{\pi}{9}\ \left(\dfrac{2\pi}{3}\right) \end{array}\right.$