Corrigé de l'interrogation du 10 décembre.

Exercice 1.

$$f(x) = -2x^2 + x - 1$$

1. (a)

$$\begin{aligned}\tau_2(h) &= \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{-2(2+h)^2+(2+h)-1-(-7)}{h} = \frac{-2(4+4h+h^2)+2+h-6}{h} \\ &= \frac{-2h^2-7h}{h} = -2h-7\end{aligned}$$

(b)

$$\lim_{h\to 0}\tau_2(h) = \lim_{h\to 0} -2h-7 = -7 = f'(2)$$

(c) Puisque l'équation de la tangente en a est donnée par :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)\ .$$

Alors l'équation de la tangente en 2 est (puisque $f(2) = -7$) :

$$y = -7(x-2) - 7 = -7x + 7$$

2.

$$\begin{aligned}\tau_a(h) &= \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{-2(a+h)^2+(a+h)-1-(-2a^2+a-1)}{h} \\ &= \frac{-2(a^2+2ah+h^2)+a+h+2a^2-a}{h} = \frac{-2h^2-4ha+h}{h} \\ &= -4a+1-2h\end{aligned}$$

Donc :

$$\lim_{h\to 0}\tau_a(h) = \lim_{h\to 0} -4a+1-2h = -4a+1 = f'(a)$$

Résultat que l'on retrouve facilement avec les formules usuelles :

$$f'(x) = -4x + 1$$

Exercice 2.

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+2}$$

1.

$$\begin{aligned}\tau_1(h) &= \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\dfrac{1+h+1}{(1+h)^2+2} - \dfrac{2}{3}}{h} = \frac{\dfrac{3(2+h)-2(3+2h+h^2)}{3(3+2h+h^2)}}{h} \\ &= \frac{h-2h^2}{3h(3+2h+h^2)} = \frac{1-2h}{3(3+2h+h^2)}\end{aligned}$$

2.

$$\lim_{h\to 0}\tau_1(h) = \lim_{h\to 0}\frac{1-2h}{3(3+2h+h^2)} = \frac{1}{9} = f'(1)$$

3.

$$\tau_a(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\dfrac{a+h+1}{(a+h)^2+2} - \dfrac{a+1}{a^2+2}}{h} = \frac{\dfrac{(a^2+2)(a+h+1)-(a+1)((a+h)^2+2)}{((a+h)^2+2)(a^2+2)}}{h}$$
$$= \frac{(a^2+2)(a+1)+h(a^2+2)-(a+1)(a^2+2)-(2ah+h^2)(a+1)}{((a+h)^2+2)(a^2+2)h} = \frac{(a^2+2)-(2a+h)(a+1)}{((a+h)^2+2)(a^2+2)}$$

Donc :

$$\lim_{h\to 0} \tau_a(h) = \lim_{h\to 0} \frac{(a^2+2)-(2a+h)(a+1)}{((a+h)^2+2)(a^2+2)} = \frac{(a^2+2)-2a^2-2a}{(a^2+2)^2} = \frac{-a^2-2a+2}{(a^2+2)^2} = f'(a)$$

Résultat que l'on retrouve facilement avec les formules usuelles :

$$f'(x) = \frac{(x^2+2)-(x+1)\times 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{-x^2-2x+2}{(x^2+2)^2}$$

Exercice 3.

$$f(x) = -2x^2 - x + 1$$

1. (a)

$$\tau_2(h) = \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{-2(2+h)^2-(2+h)+1-(-9)}{h} = \frac{-2(4+4h+h^2)-2-h+10}{h}$$
$$= \frac{-2h^2-9h}{h} = -2h-9$$

(b)

$$\lim_{h\to 0} \tau_2(h) = \lim_{h\to 0} -2h-9 = -9 = f'(2)$$

(c) Puisque l'équation de la tangente en a est donnée par :

$$y = f'(a)(x-a)+f(a) \ .$$

Alors l'équation de la tangente en 2 est (puisque $f(2) = -9$) :

$$y = -9(x-2)-9 = -7x+9$$

2.

$$\tau_a(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{-2(a+h)^2-(a+h)+1-(-2a^2-a+1)}{h}$$
$$= \frac{-2(a^2+2ah+h^2)-a-h+2a^2+a}{h} = \frac{-2h^2-4ha-h}{h}$$
$$= -4a-1-2h$$

Donc :

$$\lim_{h\to 0} \tau_a(h) = \lim_{h\to 0} -4a-1-2h = -4a-1 = f'(a)$$

Résultat que l'on retrouve facilement avec les formules usuelles :

$$f'(x) = -4x-1$$

Exercice 4.

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+3}$$

1.
$$\tau_1(h) = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\dfrac{1+h-1}{(1+h)^2+3} - 0}{h} = \frac{1}{(1+h)^2+3}$$

2.
$$\lim_{h\to 0} \tau_1(h) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{(1+h)^2+3} = \frac{1}{4} = f'(1)$$

3.
$$\tau_a(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\dfrac{a+h-1}{(a+h)^2+3} - \dfrac{a-1}{a^2+3}}{h} = \frac{\dfrac{(a^2+3)(a+h-1)-(a-1)((a+h)^2+3)}{((a+h)^2+3)(a^2+3)}}{h}$$
$$= \frac{(a^2+3)(a-1)+h(a^2+3)-(a-1)(a^2+3)-(2ah+h^2)(a-1)}{((a+h)^2+3)(a^2+3)h} = \frac{(a^2+3)-(2a+h)(a-1)}{((a+h)^2+3)(a^2+3)}$$

Donc :

$$\lim_{h\to 0} \tau_a(h) = \lim_{h\to 0} \frac{(a^2+3)-(2a+h)(a-1)}{((a+h)^2+3)(a^2+3)} = \frac{(a^2+3)-2a^2+2a}{(a^2+3)^2} = \frac{-a^2+2a+3}{(a^2+3)^2} = f'(a)$$

Résultat que l'on retrouve facilement avec les formules usuelles :

$$f'(x) = \frac{(x^2+3)-(x-1)\times 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}$$