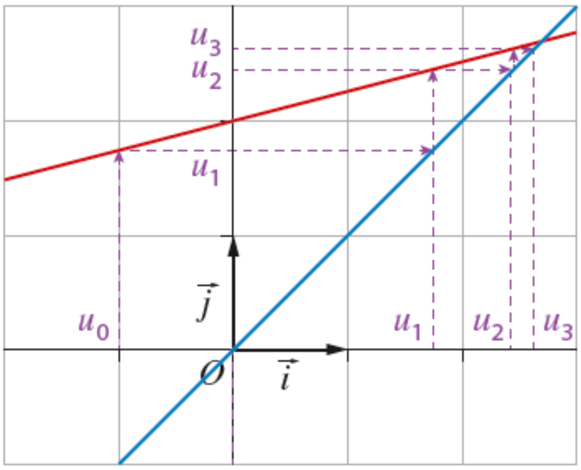
Correction DM 1 : ex 31-37-69 chapitre 1

**31** **1.**




**2. a.** On conjecture que la suite $(u_n)$ est croissante.

**b.** On considère la propriété $P(n) : u_{n+1} \geqslant u_n$.

• Initialisation. Pour $n_0 = 0$, $u_0 = -1$, $u_1 = \frac{1}{4} \times (-1) + 2 = 1{,}75$ et $1{,}75 \geqslant -1$. Donc $P(0)$ est vraie.

• Hérédité. On considère un entier quelconque $k \geqslant 0$.
On suppose que $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_{k+1} \geqslant u_k$.

$$\begin{aligned} u_{k+1} \geqslant u_k &\Leftrightarrow \frac{1}{4}u_{k+1} \geqslant \frac{1}{4}u_k \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{4}u_{k+1} + 2 \geqslant \frac{1}{4}u_k + 2 \\ &\Leftrightarrow u_{k+2} \geqslant u_{k+1}. \end{aligned}$$

Donc $P(k+1)$ est vraie. La propriété est héréditaire.

• Conclusion. La propriété $P(n)$ est vraie au rang $n_0 = 0$ et elle est héréditaire, donc $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.
La suite $(u_n)$ est donc croissante.

**3. a.** On conjecture que $u_n \leqslant 3$ pour tout entier naturel $n$.

**b.** On considère la propriété $P(n) : u_n \leqslant 3$.

• Initialisation. Pour $n_0 = 0$, $u_0 = -1$ et $-1 \leqslant 3$. Donc $P(0)$ est vraie.

• Hérédité. On considère un entier quelconque $k \geqslant 0$.
On suppose que $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_k \leqslant -3$.

$$u_k \leqslant 3 \Leftrightarrow \frac{1}{4}u_k \leqslant \frac{1}{4} \times 3 \Leftrightarrow \frac{1}{4}u_k + 2 \leqslant \frac{1}{4} \times 3 + 2 \Leftrightarrow u_{k+1} \leqslant \frac{11}{4}.$$

Or $\frac{11}{4} \leqslant 3$. Ainsi, $u_{k+1} \leqslant 3$. Donc $P(k+1)$ est vraie.
La propriété est héréditaire.

• Conclusion. La propriété $P(n)$ est vraie au rang $n_0 = 0$ et elle est héréditaire, donc $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

**37** On considère la propriété $(Pn)$ :

$$P(n): \frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}.$$

• Initialisation. Pour $n_0=1$, $\frac{1}{1\times 3}=\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$. Donc $P(1)$ est vraie.

• Hérédité. On considère un entier quelconque $k \geqslant 1$.

On suppose que $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que

$$\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\ldots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}.$$

On veut montrer que $P(k+1)$ est alors vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\ldots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}.$$

$$\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\ldots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)}$$

$$=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\ldots+\frac{1}{(2k-1)-(2k+1)}$$

$$+\frac{1}{(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)}$$

$= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1\times 3} + \frac{1}{3\times 5} + \ldots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

$+ \frac{1}{(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)}$

$= \frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1\times 3} + \frac{1}{3\times 5} + \ldots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

$+ \frac{1}{(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)}$

$= \frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}$

Le trinôme $2k^2+3k+1$ a pour discriminant $\Delta = 1$, il admet donc deux racines réelles distinctes : $x_1 = -1$ et $x_2 = -\frac{1}{2}$ et $2k^2+3k+1 = 2(k+1)\left(k+\frac{1}{2}\right) = (k+1)(2k+1)$.

Ainsi, $\frac{1}{1\times 3} + \frac{1}{3\times 5} + \ldots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

$+ \frac{1}{(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)}$

$= \frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1\times 3} + \frac{1}{3\times 5} + \ldots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

$+ \frac{1}{(2(k+1)-1)(2(k+1)+1)}$

$= \frac{k+1}{(2(k+1)+1)}$.

Donc $P(k+1)$ est vraie. La propriété est héréditaire.

• Conclusion. La propriété $P(n)$ est vraie au rang $n_0 = 1$ et elle est héréditaire, donc $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

**69** **1.** On considère la propriété $P(n)$ : $u_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{17}{2}n$.

• Initialisation. Pour $n_0 = 0, u_0 = 0, \frac{3}{2} \times 0^2 - \frac{17}{2} \times 0 = 0$ et $0 = 0$.
Donc $P(0)$ est vraie.

• Hérédité. On considère un entier quelconque $k \geqslant 0$.
On suppose que la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $u_k = \frac{3}{2}k^2 - \frac{17}{2}k$ et on veut montrer que $P(k+1)$ est alors vraie.

Par hypothèse de récurrence, $u_k = \frac{3}{2}k^2 - \frac{17}{2}k$.

$$u_{k+1} = u_k + 3k - 7 = \frac{3}{2}k^2 - \frac{17}{2}k + 3k - 7$$
$$\Leftrightarrow u_{k+1} = \frac{3}{2}k^2 - \frac{11}{2}k - 7.$$

Or $\frac{3}{2}(k+1)^2 - \frac{17}{2}(k+1) = \frac{3}{2}k^2 + 3k + \frac{3}{2} - \frac{17}{2}k - \frac{17}{2}$
$= \frac{3}{2}k^2 - \frac{11}{2}k - 7,$

donc $u_{k+1} = \frac{3}{2}(k+1)^2 - \frac{17}{2}(k+1)$.

$P(k+1)$ est vraie. La propriété est héréditaire.

• Conclusion. La propriété $P(n)$ est vraie au rang $n_0 = 0$ et elle est héréditaire, donc $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

**2. a.** Pour tout $n$ entier naturel, $v_n = u_{n+1} - u_n = u_n + 3n - 7 - u_n$
$= 3n - 7$.

La suite $(v_n)$ est arithmétique de raison 3 et de premier terme $-7$.

**b.** $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1} = u_1 - u_0 + u_2 - u_1 + \ldots + u_n - u_{n-1}$
$= u_n - u_0$.

**c.** $S_n$ est la somme des $n$ premiers termes d'une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $-7$.

$$S_n = \frac{(-7 + 3(n-1) - 7) \times n}{2} = \frac{(3n - 17) \times n}{2} = \frac{3n^2 - 17n}{2}$$
$$= \frac{3}{2}n^2 - \frac{17}{2}n.$$

**d.** Pour tout entier naturel $n$, on a $S_n = u_n - u_0$, donc $u_n - u_0 = \frac{3}{2}n^2 - \frac{17}{2}n$. Ainsi, $u_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{17}{2}n + u_0$.

Donc $u_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{17}{2}n$ pour tout entier naturel $n$.

**3.** Pour tout entier naturel $n$, $v_n = u_{n+1} - u_n = u_n + an + b - u_n$
$= an + b$.

La suite $(v_n)$ est arithmétique de raison $a$ et de premier terme $b$.

$S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_{n-1} = u_1 - u_0 + u_2 - u_1 + \ldots + u_n - u_{n-1}$
$= u_n - u_0$.

$S_n$ est aussi la somme des $n$ premiers termes d'une suite arithmétique de raison $a$ et de premier terme $b$.

$$S_n = \frac{(b + a(n-1) + b) \times n}{2} = \frac{a}{2}n^2 + \frac{2b-a}{2}n.$$

Pour tout entier naturel $n$, $u_n - u_0 = \frac{a}{2}n^2 + \frac{2b-a}{2}n$.

Donc $u_n = \frac{a}{2}n^2 + \frac{2b-a}{2}n + u_0$, pour tout entier naturel $n$.