Durée : 3 heures

Corrigé du baccalauréat ES Liban juin 2013

Exercice 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. Parmi toutes les fonctions définies sur $]0\ ;\ +\infty[$ et dont l'expression algébrique est donnée ci-dessous, la seule qui est convexe est :
   On sait que la fonction logarithme népérien est concave, que la fonction exponentielle est convexe donc son opposé sera concave.
   On calcule alors la dérivée seconde des fonctions $f_a''(x) = 6x - 6$ et $f_d''(x) = 6$.
   Seule la fonction $f_d(x)$ a une dérivée positive sur $]0\ ;\ +\infty[$ donc la bonne réponse est d.
2. On calcule les dérivées des fonctions proposées en éliminant les fonctions des réponses a et d.
   On a $F_b'(x) = 1 \times \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x - 1 + 1 = \ln x$. La bonne réponse est donc b
3. On détermine une primitive de la fonction $f(x) = \mathrm{e}^{2x} = \dfrac{1}{2} 2\mathrm{e}^{2x}$.
   On reconnait la forme $u'\mathrm{e}^u$ dont la primitive est e^u.
   On a donc $F(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$ et par suite $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_0^{\mathrm{e}} = F(\mathrm{e}) - F(0) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^0 = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^2 - 1\right)$.
   La bonne réponse est donc d.
4. On détermine à la calculatrice la valeur de $P(2 \leqslant X \leqslant 3)$ sachant que X suit une loi normale $\mathcal{N}(1\ ;\ 2^2)$ soit $P(2 \leqslant X \leqslant 3) \approx 0,15$.
   La bonne réponse est donc la question a.
5. On sait qu'un intervalle de confiance au seuil de 95% est de la forme $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$.
   On a $f = \dfrac{55}{100}$ et $n = 100$ soit $[0,55 - 0,1\ ;\ 0,55 + 0,1] = [0,45\ ;\ 0,65]$.
   La bonne réponse est donc la réponse c.

Exercice 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

1. **a.** On calcule $v_{n+1} = u_{n+1} - 12 = 0,9u_n + 1,2 - 12 = 0,9u_n - 10,8 =$
   $0,9(u_n - 12) = 0,9v_n$
   La suite (v_n) est donc géométrique de raison 0,9 et de premier terme
   $v_0 = u_0 - 12 = -2$
   b. En appliquant les formules sur les suites géométriques, on aura :
   $v_n = v_0 \times q^n = -2 \times 0,9^n$
   c. On a $v_n = u_n - 12$. soit $u_n = v_n + 12$ et donc pour tout n, $u_n = 12 - 2 \times 0,9^n$.
2. Comme la raison de la suite (v_n) est comprise entre 0 et 1, la limite de la suite (v_n) est donc nulle.
   Par suite, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n + 12 = 12$.

Partie B

1. La diminution de 10% de la population de la ville peut se traduire par le coefficient multiplicateur $0,9$ soit $0,9u_n$ auquel il faut ajouter les 1 200 nouveaux habitants soit $1,2$ milliers.
   On obtient donc bien $u_{n+1} = 0,9u_n + 1,2$
2. On rajoute dans la boucle Pour la relation de récurrence soit
   a prend la valeur $0,9a + 1,2,;$
   a prenant la valeur du terme de la suite cherchée.
3. **a.** $12 - 2 \times 0,9^n > 11,5 \Leftrightarrow -2 \times 0,9^n > -0,5$
   On multiplie l'inégalité par -1 donc on change le sens de l'inégalité soit
   $2 \times 0,9^n < 0,5 \Leftrightarrow 0,9^n < 0,25$.
   La fonction logarithme étant strictement croissante, on obtient :
   $\ln(0,9^n) < \ln(0,25) \Leftrightarrow n\ln(0,9) < \ln(0,25)$.
   $\ln(0,9)$ étant négatif, on aura $n > \dfrac{\ln(0,25)}{\ln(0,9)}$ soit $n > 13,15$.
   Les solutions de l'inéquation sont donc les entiers naturels supérieur à 14.

   b. La population de Bellecité sera supérieure à 11,5 milliers d'habitants à partir de l'année $2012 + 14$ soit 2026.

Exercice 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction C définie sur l'intervalle $[5\,;\,60]$ par :

$$C(x) = \frac{\mathrm{e}^{0,1x} + 20}{x}.$$

1. C est dérivable comme quotient de fonctions dérivables sur $[5;60]$ et on a :
   $C'(x) = \dfrac{0,1\mathrm{e}^{0,1x} \times x - \left(\mathrm{e}^{0,1x} + 20\right) \times 1}{x^2} = \dfrac{0,1x\mathrm{e}^{0,1x} - \mathrm{e}^{0,1x} - 20}{x^2}$
2. On considère la fonction f définie sur $[5\,;\,60]$ par

   $$f(x) = 0,1x\mathrm{e}^{0,1x} - \mathrm{e}^{0,1x} - 20.$$

   a. f est dérivable sur $[5;60]$ comme produit de fonction dérivable et
   $f'(x) = 0,1\mathrm{e}^{0,1x} + 0,1x \times 0,1\mathrm{e}^{0,1x} - 0,1\mathrm{e}^{0,1x} = 0,01x\mathrm{e}^{0,1x}$.
   Comme $x \in [5\,;\,60]$ et qu'une exponentielle est toujours positive, $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [5\,;\,60]$ et par suite, f est croissante.

   b. Comme f est continue, strictement croissante, que $f(5) \approx -20,82$, $f(60) \approx 1997,1$ et $0 \in [f(5)\,;\,f(60)]$; d'après le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte croissance, l'équation $f(x) = 0$ aura une unique solution α sur $[5\,;\,60]$.

   c. En utilisant la calculatrice, comme $f(25) \approx -1,726$ et $f(26) \approx 1,5419$, on a l'encadrement suivant : $25 \leqslant \alpha \leqslant 26$.

   d. f étant strictement croissante, $f(x)$ sera négatif sur $[5\,;\,\alpha]$ et positif sur $[\alpha\,;\,60]$
3. Le signe de $C'(x)$ dépend du signe de $f(x)$ car $C'(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$, on obtient le tableau de variation suivant :

x	5	α	60
Signe de $f'(x)$	$-$	0	$+$
Variations de f	$C(5)$ ↘	$C(\alpha)$	↗ $C(60)$

Avec $C(5) \approx 4,32$; $C(\alpha) \approx 1,3$ et $C(60) \approx 7,05$

4. **a.** L'équation $C(x) = 2$ admet deux solutions, l'une dans l'intervalle $[5~;~\alpha]$ l'autre dans l'intervalle $[\alpha~;~60]$.

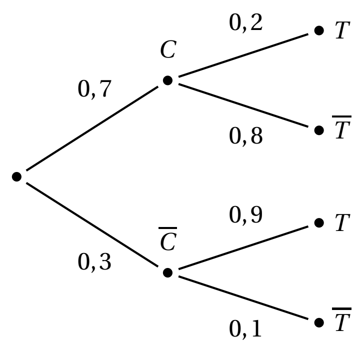
   b. L'équation $C(x) = 5$ admet une solutions dans l'intervalle $[\alpha~;~60]$

Partie B

La fonction C admet un minimum en α, le nombre de vélo à produire sera donc soit 25 soit 26. Comme $C(25) \approx 1{,}2873$ et $C(26) \approx 1{,}2871$, le coût moyen minimal sera atteint pour une production de 26 vélos.

Exercice 4 **5 points**
Enseignement obligatoire

1. A l'aide des données du texte, on obtient l'arbre suivant :



2. On cherche $P(C \cap T) = 0,7 \times 0,2 = 0,14$
3. C et $\overline{C}$ forment une partition de l'univers, donc d'après les probabilités totales,
   $P(T) = P(C \cap T) + P\left[\overline{C} \cap T\right] = 0,14 + 0,3 \times 0,9 = 0,41$
4. On cherche $P_T\left[\overline{C}\right] = \dfrac{P\left[T \cap \overline{C}\right]}{P(T)} = \dfrac{0,3 \times 0,9}{0,41} = \dfrac{27}{41}$
5. On obtient le tableau de la loi de probabilité de X en s'aidant des données de l'arbre :

X_i	0	6	10
$P(X = X_i)$	$0,7 \times 0,8 + 0,3 \times 0,1 = 0{,}59$	$0{,}14$	$0,3 \times 0,9 = 0{,}27$

6. $E(X) = 0 \times 0,59 + 6 \times 0,14 + 10 \times 0,27 = 3,54$
7. Chaque terrain rapporte en moyenne $3,54$ € pour une heure d'utilisation, le gain moyen hebdomadaire des 10 terrains sera donc de $10 \times 70 \times 3,54 = 2\,478$ €.

Exercice 4 **5 points**
Enseignement de spécialité

1. **a.** Ce graphe comporte 9 sommets. Il est donc d'ordre 9.
   b. Chacune des villes est reliée par autoroute à n'importe quelle autre ville. Le graphe est donc connexe.
   c. Il n'existe pas, par exemple, d'autoroute reliant directement Bordeaux à Clermont-Ferrand. Le graphe n'est donc pas complet.
2. Il y a quatre sommets d'ordre impair (B ; R ; C ; V). D'après le théorème d'Euler, il n'est donc pas possible de trouver une chaîne passant une fois et une seule par chaque arête.
3. **a.**

$$5\times 0+3\times 1+0\times 0+1\times 0+1\times 0+2\times 0+6\times 0+1\times 1+2\times 0=4$$

   b. Il y a quatre trajets qui permettent d'aller de Lyon à Biarritz en 4 étapes.
4.

   a.

L	B	C	M	P	R	T	V	Z	choix
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	L
	∞	10,7(L)	∞	∞	∞	∞	7,1(L)	∞	V
	∞	10,7(L)	22,8(V)	23,3(V)	∞	∞		∞	C
	∞		22,8(V)	19,3(V)	22,2(C)	∞		∞	P
	∞		22,8(V)		22,2(C)	38,9(P)		∞	R
	33,7(R)		22,8(V)			36,8(R)		∞	M
	33,7(R)					36,8(R)		∞	B
						36,8(R)		38,1(B)	T
								38,1(B)	Z

   Le chemin qui minimise le coût des péages est le chemin qui, partant de, Lyon passe dans l'ordre par les villes de Clermont-Ferrand, de Brive et de Bordeaux pour arriver à Biarritz.

   b. Le coût de ce trajet est 38,10 €.