Durée : 3 heures

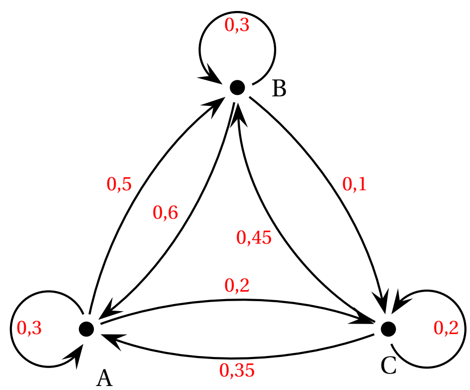
Corrigé du baccalauréat Terminale ES/L – Liban mai 2019

Exercice 2 **5 points**

Candidats de la série ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie 1

1. On a le graphe probabiliste suivant à trois sommets correspondant à la situation décrite :



2. Du système suivant $\left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & 0{,}3a_n + 0{,}6b_n + 0{,}35c_n \\ b_{n+1} & = & 0{,}5a_n + 0{,}3b_n + 0{,}45c_n \\ c_{n+1} & = & 0{,}2a_n + 0{,}1b_n + 0{,}2c_n \end{array}\right.$ on en déduit que la matrice de transition est

$$M = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.35 & 0.45 & 0.2 \end{pmatrix}$$

3. Comme $P_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}355 & 0{,}405 & 0{,}24 \end{pmatrix}$, on a ensuite

$$P_2 = P_1 \times M = \begin{pmatrix} 0{,}355 & 0{,}405 & 0{,}24 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}35 & 0{,}45 & 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4335 & 0{,}407 & 0{,}1595 \end{pmatrix}$$

4. $\forall n \geqslant 1$, $P_{n+1} = P_n \times M$, donc $P_n = P_1 \times M^{n-1}$.
Le douzième jour correspond à $n = 11$; le treizième à $n = 12$. Donc $P_{12} = P_1 \times M^{11}$ et $P_{13} = P_1 \times M^{12}$.
À la calculatrice, on trouve : $P_{12} \approx \begin{pmatrix} 0{,}431 & 0{,}410 & 0{,}159 \end{pmatrix}$ et $P_{13} \approx \begin{pmatrix} 0{,}431 & 0{,}410 & 0{,}159 \end{pmatrix}$.
$P_{12} \approx P_{13}$. L'état d'équilibre est atteint. Les valeurs a_n, b_n et c_n n'évolueront presque plus.
Comme $c_{12} \approx c_{13}$, le restaurateur a raison d'affirmer que la proportion des clients qui choisiront le plat C sera d'environ 15,9 % les douzième et treizième jours.

Partie 2

1. Le tableau suivant donne les degrés des différents sommets :

Sommet	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6	H_7	H_8
Degré	3	4	6	2	2	3	4	2

a. Deux sommets sont de degré impair, les sommets H_1 et H_6. Par conséquent, d'après le théorème d'Euler, ce graphe connexe admet une chaine eulérienne. Il existe un parcours qui emprunte toutes les rues une et une seule fois.

b. Un graphe connexe contient un cycle eulérien si et seulement si il ne possède aucun sommet de degré impair (tous ses sommets sont de degré pair). Donc ce graphe n'admet pas de cycle eulérien.

2. Pour déterminer le trajet le plus rapide pour aller de B vers A, on utilise l'algorithme de Dijkstra.

H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6	H_7	H_8	Sommet choisi
8 (H_4)	∞	∞	0	15 (H_4)	∞	∞	∞	H_1(80)
	17 (H_1)	24 (H_1)		15 (H_4)	∞	∞	∞	H_5(15)
	17 (H_1)	~~24 (H_1)~~ 22 (H_5)			∞	∞	∞	H_2 (17)
		22 (H_5) ~~40 (H_2)~~			34 (H_2)	∞	∞	H_3 (22)
					~~34 (H_2~~ 27 (H_3)	26 (H_3)	50 (H_3)	H_7 (26)
					27 (H_3) ~~33 (H_7)~~		35 (H_7) ~~50 (H_3)~~	H_6 (27)
							35 (H_7) ~~36 (H_6)~~	H_8 (35)

Le trajet le plus court de H_4 à H_8 est de longueur 35 : $H_4 \xrightarrow{15} H_5 \xrightarrow{7} H_3 \xrightarrow{4} H_7 \xrightarrow{9} H_8$.