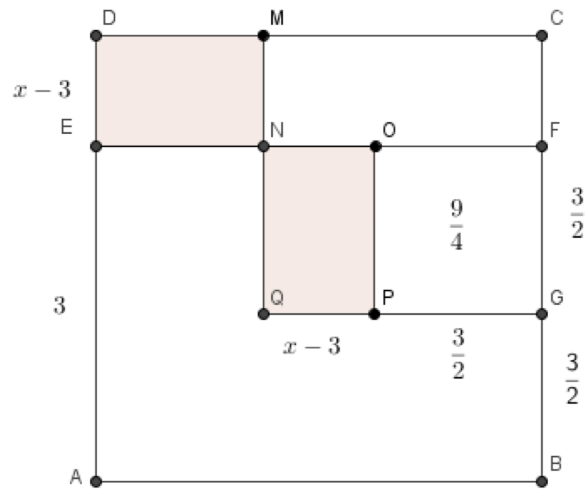
Chapitre 1 : Second degré

Notation : : Dans l'ensemble du cours, on considère $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a,b et c des réels et $a \neq 0$.

1 Un peu d'histoire.

Les premières équations du second degré répertorié sont du à *al-Khawarizmi* (780-850 environ) dans son ouvrage *Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison.* Il y décrit et résout les 6 équations s du second degré ainsi que les méthodes pour s'y ramener. Les mathématiques se détachent progressivement de la contrainte géométrique : c'est la naissance de l'algèbre. Dans son ouvrage on trouve notamment la résoltuion de l'équation : $3x+4 = x^2$. Les mathématiques se détachent progressivement de la contrainte géométrique : c'est la naissance de l'algèbre.



Le problème est le suivant. On construit un rectangle ABFE de côté $AB = x$ et $AE = 3$ et l'on veut déterminer $x > 3$ de sorte que dans le carré ABCD, l'air du rectangle CDEF soit de 4.

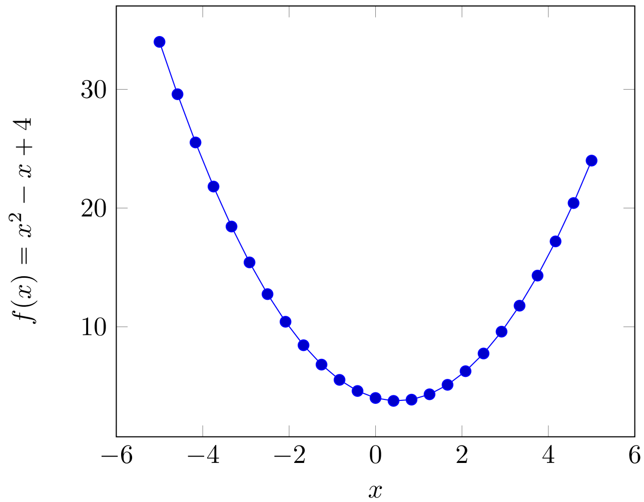
2 Attendus

Les prérequis peuvent être revus page 16.

- Savoir représenter une fonction polynôme de degré 2.
- Déterminer la forme canonique d'une fonction polynôme de degré 2. (1 page 19)
  - Á partir de la forme développée *(9-10 page 26)*
  - Á partir d'un graphique *(11-13 page 26)*
  - Á partir de l'extremum et d'un point *(12 page 26)*
- Déterminer la forme factoriser d'une fonction polynôme de degré 2.
  - Á Partir de la forme développée
  - Á partir de la représentation graphique *(21 page 27)*
- Déterminer les variations d'une fonction polynôme de degré 2. (Utilisation de la forme canonique) (2 page 19)
- Déterminer l'extremum d'une fonction polynôme de degré 2. (Utilisation de la forme canonique)
- Savoir utiliser la forme adéquate permettant la résolution d'un problème (forme développée, factorisée ou canonique)
- Détermination du discriminant et des racines d'une fonction polynôme de degré 2. *(page 21)*
- Résolution d'équation et d'inéquation du second degré. (page 21-23)

3 Fonction polynômes du second degré

3.1 Définition



Définition 1. On appelle **fonction polynomiale du second degré** toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ et de la forme

$$f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$$

avec a,b et c des réels et $a \neq 0$. Ce sont les **coefficients** de la fonction polynomiale.

Remarque 1. Une fonction polynôme de degré 2 s'appelle également fonction trinôme du second degré ou par abus de langage "trinôme".

3.2 Forme Canonique

Définition-Proposition 1. On considère une fonction polynomiale f telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$. La fonction f peut s'écrire sous la forme $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$. Cette expression est appelée **forme canonique** de la fonction polynomiale f. Vidéo pour la méthode : `https://youtu.be/OQHf-hX9JhM`

Démonstration 1. On considère une fonction polynomiale f telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$.
$1^{ière}$ étape : Factorisation par a

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

2*ième* étape : On fait apparaître l'identité remarquable $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ dans l'expression que l'on trouve dans la parenthèse

$$f(x) = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c$$

$3^{ième}$ étape : On applique l'identité remarquable précédente :

$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c$$

$4^{ième}$ étape : On développe le a :

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Proposition 1. *On a obtenu les expressions de* $\alpha = \frac{-b}{2a}$ *et* $\beta = f(\frac{-b}{2a}) = \frac{-b^2+4ac}{4a}$. *Par ailleurs l'expression de la forme canonique permet de justifier que la fonction polynôme* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *admet pour extremum* β *et que cet extremum est obtenu en* $x = \alpha$.

Démonstration 2. Si $a > 0$
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0 \Longleftrightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0 \Longleftrightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a} \geqslant -\frac{b^2-4ac}{4a} \Longleftrightarrow f(x) \geqslant \beta$
On remarque ici que l'extremum est un mimimun.

Méthode 1. Obtenir une forme canonique : `https://youtu.be/OQHf-hX9JhM`

Méthode 2. Obtenir l'extremum d'une fonction polynôme du second degré `https://youtu.be/KK76UohzUW4`

3.3 Applications aux variations d'une fonction polynomiale

Soit f une fonction polynomiale de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$. On peut distinguer 2 cas :

— Si $a > 0$ alors on a une courbe et un tableau de variation de la forme suivante :

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	β	$\nearrow$	$+\infty$

— Si $a < 0$ alors on a un tableau de variation de la forme suivante :

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	β	$\searrow$	$-\infty$

On peut voir que l'extremum de la fonction dans les deux cas est $f(\frac{-b}{2a})$ et atteint en $x = \frac{-b}{2a}$.

4 Résolution d'équations et inéquations du second degré

Dans cette partie nous allons donner une méthode pour résoudre les équations ou inéquations mettant en jeu une fonction polynomiale du second degré. Pour cela nous allons nous pencher sur l'équation $f(x) = 0$ où f est une fonction polynomiale du second degré.

4.1 Racine et Discriminant

4.1.1 Définitions.

Définition 2. On appelle **racine** de f tout nombre réel x tel que $f(x) = 0$.

On appelle **discriminant** de $f(x) = ax^2 + bx + c$ et l'on note Δ, le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

Remarque 2. On peut remarquer que $\beta = -\frac{\Delta}{4a}$

4.1.2 Propriétés.

Proposition 2. *On considère $f(x) = ax^2 + bx + c$ et son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. On distingue alors 3 cas :*

— ***Si*** *$\Delta > 0$ alors l'équation f possède 2 racines x_1 et x_2 telles que*

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

et f peut être factorisé sous la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

— ***Si*** *$\Delta = 0$ alors l'équation f possède 1 unique racine x_0 telle que*

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

et f peut se factoriser sous la forme $f(x) = a(x - x_0)^2$. On dit de plus que x_0 est une racine double

— ***Si*** *$\Delta < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solutions réelle.*

Démonstration 3. Si l'on reprend la démonstration 1 vue précédemment permettant d'obtenir la forme canonique.

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a} = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

Dans le cas où Δ est positif ou nul on peut appliquer l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right) = a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = a\left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

La recherche des racines devient donc :

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \Longleftrightarrow a\left(x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0 \underbrace{\Longleftrightarrow}_{produit\ nul} x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \ ou\ x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Dans le cas particulier où $\Delta = 0$, on obtient :

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2$$

Remarque 3. La forme factorisée nous permet alors aisément de donner le tableau de signe de f.

Méthode 3. Résoudre une équation du second degré :
`https://youtu.be/youUIZ-wsYk`
`https://youtu.be/RhHheS2Wpyk`
`https://youtu.be/v6fI2RqCCiE`

4.1.3 Relations entre racines et coefficients

Proposition 3. *On obtient les deux relations suivantes :*

$$\begin{cases} ax_1x_2 = c \\ a(x_1+x_2) = b \end{cases}$$

Remarque 4. Avant de calculer le discriminant il peut être intéressant de chercher si f possède une racine évidente. En effet, si l'on connait une racine x_1 de f alors il est facile de trouver la deuxième puisque $ax_1x_2 = c$ ou $a(x_1+x_2) = b$.

4.1.4 Factoriser une fonction polynôme du second degré.

Méthode 4. Factoriser un trinôme : `https://youtu.be/eKrZK1Iisc8`

4.2 Applications aux inéquations

4.2.1 Signe d'un trinôme.

Proposition 4. *On obtient les 3 situations suivantes :*

— ***Si*** $\Delta > 0$ *alors le signe de* $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ *est donné par le tableau suivant :*

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		*signe de a*	0	*signe de -a*	0	*signe de a*	

— ***Si*** $\Delta = 0$ *alors le signe de* $f(x) = a(x-x_0)^2$ *est donné par le tableau suivant :*

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
		signe de a	0	*signe de a*	

— ***Si*** $\Delta < 0$ *alors le signe de* $f(x) = a\left((x-\alpha)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$ *(On peut observer* $(x-\alpha)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \geqslant -\frac{\Delta}{4a^2}$*) est donné par le tableau suivant :*

x	$-\infty$		$+\infty$
		signe de a	

Méthode 5. Vidéo `https://youtu.be/sFNW9KVsTMY` et `https://youtu.be/pT4xtI2Yg2Q`

4.3 Résolution d'inéquetion du seond degré.

Pour résoudre une inéquation du second degré l'objectif sera d'utiliser ce que l'on sait sur le signe d'un trinôme (partie précédente)

Méthode 6. Vidéo : `https://youtu.be/AEL4qKKNvp8`