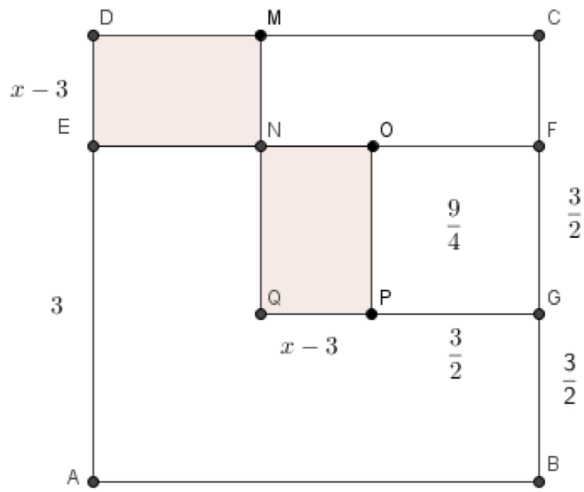
Chapitre 1 : Second degré

Notation : : Dans l'ensemble du cours, on considère $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a,b et c des réels et $a \neq 0$.

1 Un peu d'histoire.

Les premières équations du second degré répertorié sont du à *al-Khawarizmi* (780-850 environ) dans son ouvrage *Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison.* Il y décrit et résout les 6 équations s du second degré ainsi que les méthodes pour s'y ramener. Les mathématiques se détachent progressivement de la contrainte géométrique : c'est la naissance de l'algèbre. Dans son ouvrage on trouve notamment la résoltuion de l'équation : $3x+4 = x^2$. Les mathématiques se détachent progressivement de la contrainte géométrique : c'est la naissance de l'algèbre.



Le problème est le suivant. On construit un rectangle ABFE de côté $AB = x$ et $AE = 3$ et l'on veut déterminer $x > 3$ de sorte que dans le carré ABCD, l'air du rectangle CDEF soit de 4.

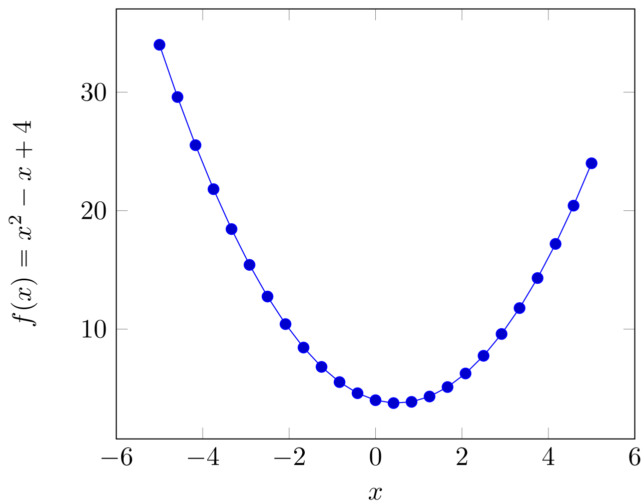
2 Attendus

Les pré-requis peuvent être revus page 16.

- Savoir représenter une fonction polynôme de degré 2.
- Déterminer la forme canonique d'une fonction polynôme de degré 2.
  - Á partir de la forme développée .
  - Á partir d'un graphique .
  - Á partir de l'extremum et d'un point .
- Déterminer la forme factoriser d'une fonction polynôme de degré 2.
  - Á Partir de la forme développée.
  - Á partir de la représentation graphique
- Déterminer les variations d'une fonction polynôme de degré 2. (Utilisation de la forme canonique)
- Déterminer l'extremum d'une fonction polynôme de degré 2. (Utilisation de la forme canonique)
- Savoir utiliser la forme adéquate permettant la résolution d'un problème (forme développée, factorisée ou canonique)
- Détermination du discriminant et des racines d'une fonction polynôme de degré 2.
- Résolution d'équation et d'inéquation du second degré.

3 Fonction polynômes du second degré

3.1 Définition



Définition 1. On appelle **fonction polynomiale du second degré** toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ et de la forme

$$f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$$

avec a,b et c des réels et $a \neq 0$. Ce sont les **coefficients** de la fonction polynomiale.

Remarque 1. Une fonction polynôme de degré 2 s'appelle également fonction trinôme du second degré ou par abus de langage "trinôme".

Exemple 1. Voici certains exemples de polynômes :

1. $2x^2 - 7x + 4$ est un polynôme du second degré avec $a = 2$, $b = -7$ et $c = 4$.
2. $2x + 3$ n'est pas une polynôme du second degré.
3. $5(x - 3)(4 - x)$ est un polynôme du second degré qu'il faut developper pour trouver les coefficients a, b et c. Cette est ce que l'on appelle la forme factorisée.
4. $5(x - 3)^2 - 6$ est la encore un polynôme du second degré sous sa forme canonique.

3.2 Forme Canonique

Définition-Proposition 1. On considère une fonction polynomiale f telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$. La fonction f peut s'écrire sous la forme $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$. Cette expression est appelée **forme canonique** de la fonction polynomiale f.

Vidéo Méthode 1. `https://youtu.be/OQHf-hX9JhM`

Proposition 1. *On a obtenu les expressions de* $\alpha = \frac{-b}{2a}$ *et* $\beta = f(\alpha)$.

Méthode 1. Pour déterminer la forme canonique du polynôme $2x^2 - 8x + 3$. On a $a = 2$, $b = -8$ et $c = 4$. Donc pour déterminer

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-8)}{2 \times 2} = \frac{8}{4} = 2$$

Puis pour déterminer :

$$\beta = f(\alpha) = f(2) = 2 \times 2^2 - 8 \times 2 + 3 = -5$$

La forme canonique du polynôme est donc :

$$2x^2 - 8x + 3 = a(x - \alpha)^2 + \beta = 2(x - 2)^2 - 5$$

Exercice 1. Déterminer les formes canoniques des expressions suivantes :

① $P(x) = 2x^2 + x - 3$

② $Q(x) = x^2 - 3x - 4$

③ $R(x) = 3x^2 - 6x + 2$

④ $H(x) = x^2 + 4x + 4$

Proposition 2. La fonction polynôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ admet pour extremum β et que cet extremum est obtenu en $x = \alpha$. On a alors deux cas :

- *Si $a > 0$ le polynôme admet un minimum en $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et ce minimum est $f(\alpha)$.*
- *Si $a < 0$ le polynôme admet un maximum en $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et ce maximum est $f(\alpha)$.*

Méthode 2. Pour déterminer le minimum de la fonction polynôme de l'exemple précédent $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$. On a obtenu $\alpha = 2$ et $f(\alpha) = -5$. Ici comme $a > 0$ la fonction admet un **minimum** en $\alpha = 2$ et ce minimum vaut $f(\alpha) = -5$.

Exercice 2. Déterminer l'extremum des expressions suivantes (vous donnerez la valeur α pour laquelle il est atteint. Vous direz si c'est un minimum ou un maximum et combien il vaut ($f(\alpha)$) :

① $P(x) = 2x^2 + x - 3$

② $Q(x) = x^2 - 3x - 4$

③ $R(x) = 3x^2 - 6x + 2$

④ $H(x) = x^2 + 4x + 4$

Vidéo Méthode 2. Obtenir une forme canonique : `https://youtu.be/OQHf-hX9JhM`

Vidéo Méthode 3. Obtenir l'extremum d'une fonction polynôme du second degré `https://youtu.be/KK76UohzUW4`

3.3 Applications aux variations d'une fonction polynomiale

Soit f une fonction polynomiale de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$. On peut distinguer 2 cas :

— Si $a > 0$ alors on a une courbe et un tableau de variation de la forme suivante :

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	β	$\nearrow$	$+\infty$

— Si $a < 0$ alors on a un tableau de variation de la forme suivante :

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	β	$\searrow$	$-\infty$

On peut voir que l'extremum de la fonction dans les deux cas est $f(\frac{-b}{2a})$ et atteint en $x = \frac{-b}{2a}$.

Méthode 3. Pour déterminer le tableau de variation de la fonction polynôme de l'exemple précédent $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$. On a déja calculer $\alpha = 2$ et $\beta = f(\alpha) = -5$. Et comme $a > 0$, on obtient le tableau :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 3. Déterminer le tableau de variation des expressions suivantes :

① $P(x) = 2x^2 + x - 3$

② $Q(x) = x^2 - 3x - 4$

③ $R(x) = 3x^2 - 6x + 2$

④ $H(x) = x^2 + 4x + 4$

4 Résolution d'équations et inéquations du second degré

Dans cette partie nous allons donner une méthode pour résoudre les équations ou inéquations mettant en jeu une fonction polynomiale du second degré. Pour cela nous allons nous pencher sur l'équation $f(x) = 0$ où f est une fonction polynomiale du second degré.

4.1 Racine et Discriminant

4.1.1 Définitions.

Définition 2. On appelle **racine** de f tout nombre réel x tel que $f(x) = 0$.
On appelle **discriminant** de $f(x) = ax^2 + bx + c$ et l'on note Δ, le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

Exercice 4. Pour les polynômes suivants, déterminer le discriminant Δ et dire si -1 ou 1 ou 2 sont racines.

① $P(x) = -2x^2 + x - 3$
② $Q(x) = x^2 - 3x + 2$
③ $R(x) = -3x^2 - 6x + 9$
④ $H(x) = x^2 - x - 2$

4.1.2 Propriétés.

Proposition 3. *On considère $f(x) = ax^2 + bx + c$ et son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. On distingue alors 3 cas :*

— ***Si*** *$\Delta > 0$ alors l'équation f possède 2 racines x_1 et x_2 telles que*

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

et f peut être factorisé sous la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

— ***Si*** *$\Delta = 0$ alors l'équation f possède 1 unique racine x_0 telle que*

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

et f peut se factoriser sous la forme $f(x) = a(x - x_0)^2$. On dit de plus que x_0 est une racine double

— ***Si*** *$\Delta < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solutions réelle.*

Méthode 4. Pour déterminer les racines de la fonction polynôme $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$.
$1^{iére}$ **étape** : On calcul le discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 2 \times 6 = 16$$

$2^{ième}$ **étape** On détermine le nombre de racines à partir du signe du discriminant.
Ici $\Delta = 16 > 0$. Donc la fonction f admet deux racines.
$3^{ième}$ **étape** Si le discriminant les positif on détermine les racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8) - \sqrt{16}}{2 \times 2} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8) + \sqrt{16}}{2 \times 2} = 3$$

Exercice 5. Trouver les racines de $g(x) = x^2 + 4x - 1$ et $h(x) = 2x^2 - 12x + 5$.

Exercice 6. Déterminer les racines si elles existent des expressions suivantes :

① $P(x) = 2x^2 + x - 3$
② $Q(x) = x^2 - 3x - 4$
③ $R(x) = 3x^2 - 6x + 2$
④ $H(x) = x^2 + 4x + 4$

Vidéo Méthode 4. Résoudre une équation du second degré :
`https://youtu.be/youUIZ-wsYk`
`https://youtu.be/RhHheS2Wpyk`
`https://youtu.be/v6fI2RqCCiE`

4.1.3 Factoriser une fonction polynôme du second degré.

Vidéo Méthode 5. Factoriser un trinôme : `https://youtu.be/eKrZK1Iisc8`

4.2 Applications aux inéquations

4.2.1 Signe d'un trinôme.

Proposition 4. *On obtient les 3 situations suivantes :*

— ***Si*** $\Delta > 0$ *alors le signe de* $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ *est donné par le tableau suivant :*

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		*signe de a*	0	*signe de -a*	0	*signe de a*	

— ***Si*** $\Delta = 0$ *alors le signe de* $f(x) = a(x - x_0)^2$ *est donné par le tableau suivant :*

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
		signe de a	0	*signe de a*	

— ***Si*** $\Delta < 0$ *alors le signe de* $f(x) = a\left((x-\alpha)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$ *(On peut observer* $(x-\alpha)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \geqslant -\frac{\Delta}{4a^2}$*) est donné par le tableau suivant :*

x	$-\infty$		$+\infty$
		signe de a	

Vidéo Méthode 6. Vidéo `https://youtu.be/sFNW9KVsTMY` et `https://youtu.be/pT4xtI2Yg2Q`

4.3 Résolution d'inéquetion du seond degré.

Pour résoudre une inéquation du second degré l'objectif sera d'utiliser ce que l'on sait sur le signe d'un trinôme (partie précédente)

Vidéo Méthode 7. Vidéo : `https://youtu.be/AEL4qKKNvp8`

5 Corrigés des exercices :

Correction exercice 1. Déterminer les formes canoniques des expressions suivantes :

① $P(x) = 2x^2 + x - 3$
Donc pour déterminer

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2 \times 2} = \frac{-1}{4} = -0,25$$

Puis pour déterminer :

$$\beta = f(\alpha) = f\left(\frac{-1}{4}\right) = 2 \times \left(\frac{-1}{4}\right)^2 + \left(\frac{-1}{4}\right) - 3 = \frac{-13}{4} = -3,25$$

La forme canonique du polynôme est donc :

$$2x^2 + x - 3 = a(x-\alpha)^2 + \beta = 2\left[x - \left(\frac{-1}{4}\right)\right]^2 - \frac{13}{4} = 2\left(x + 0,25\right)^2 - 3,25$$

② $Q(x) = x^2 - 3x - 4$
Donc pour déterminer

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{3}{2 \times 1} = \frac{3}{2} = 1,5$$

Puis pour déterminer :

$$\beta = f(\alpha) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right) - 4 = \frac{-25}{4} = -6,25$$

La forme canonique du polynôme est donc :

$$x^2 - 3x - 4 = a(x-\alpha)^2 + \beta = (x+1,5)^2 - 6,25$$

③ $R(x) = 3x^2 - 6x + 2$
Donc pour déterminer
$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2 \times 3} = 1$$
Puis pour déterminer :
$$\beta = f(\alpha) = f(1) = 3 \times 1^2 - 6 \times 1 + 2 = -1$$
La forme canonique du polynôme est donc :
$$3x^2 - 6x + 2 = a(x-\alpha)^2 + \beta = 3(x-1)^2 - 1$$

④ $H(x) = x^2 + 4x + 4$
Donc pour déterminer
$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \times 1} = -2$$
Puis pour déterminer :
$$\beta = f(\alpha) = f(-2) = (-2)^2 + 4 \times (-2) + 4 = 0$$
La forme canonique du polynôme est donc :
$$x^2 + 4x + 4 = a(x-\alpha)^2 + \beta = 3(x-(-2))^2 = 3(x+2)^2$$

Correction exercice 2. Voir correction de l'exercice 3.

Correction exercice 3. Pour les valeurs de α et β voir exercice 1.

① $P(x) = 2x^2 + x - 3$
Ici $a = 2 > 0$ alors on a une courbe et un tableau de variation de la forme suivante :

x	$-\infty$	$\frac{-1}{4}$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$\frac{-13}{4}$	↗ $+\infty$

La fonction f admet donc un minimum en $\frac{-1}{4}$ qui vaut $\frac{-13}{4}$.

② $Q(x) = x^2 - 3x - 4$
Ici $a = 2 > 0$ alors on a une courbe et un tableau de variation de la forme suivante :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$\frac{-25}{4}$	↗ $+\infty$

La fonction f admet donc un minimum en $\frac{3}{2} = 1,5$ qui vaut $\frac{-25}{4}$.

③ $R(x) = 3x^2 - 6x + 2$
Ici $a = 2 > 0$ alors on a une courbe et un tableau de variation de la forme suivante :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	-1	↗ $+\infty$

La fonction f admet donc un minimum en 1 qui vaut -1.

④ $H(x) = x^2 + 4x + 4$
Ici $a = 2 > 0$ alors on a une courbe et un tableau de variation de la forme suivante :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f admet donc un minimum en -2 qui vaut 0.

Correction exercice 4. .

① $P(x) = -2x^2 + x - 3$ On a $\Delta = 1^2 - 4 \times (-2) \times (-3) = -23$.

-1		$P(-1) = -2 \times (-1)^2 + (-1) - 3 = -6 \neq 0$	Donc -1 n'est pas racine.
1		$P(1) = -2 \times 1^2 + 1 - 3 = -4 \neq 0$	Donc 1 n'est pas racine.
2		$P(2) = -2 \times 2^2 + 2 - 3 = -9 \neq 0$	Donc 2 n'est pas racine.

② $Q(x) = x^2 - 3x + 2$ On a $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1$

-1		$P(-1) = (-1)^2 - 3 \times (-1) + 2 = 6 \neq 0$	Donc -1 n'est pas racine.
1		$P(1) = 1^2 - 3 \times 1 + 2 = 0$	Donc 1 est racine.
2		$P(2) = 2^2 - 3 \times 2 + 2 = 0$	Donc 2 est racine.

③ $R(x) = -3x^2 - 6x + 9$ On a $\Delta = (-6)^2 - 4 \times (-3) \times 9 = 144$.

-1		$P(-1) = -3 \times (-1)^2 - 6 \times (-1) + 9 = 12 \neq 0$	Donc -1 n'est pas racine.
1		$P(1) = -3 \times 1^2 - 6 \times 1 + 9 = 0$	Donc 1 est racine.
2		$P(2) = -3 \times 2^2 - 6 \times 2 + 9 = -15 \neq 0$	Donc 2 n'est pas racine.

④ $H(x) = x^2 - x - 2$ On a $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-2) = 9$.

-1		$P(-1) = (-1)^2 - (-1) - 2 = 0$	Donc -1 est racine.
1		$P(1) = 1^2 - 1 - 2 = -2 \neq 0$	Donc 1 n'est pas racine.
2		$P(2) = 2^2 - 2 - 2 = 0$	Donc 2 est racine.

Correction exercice 5. Trouver les racines de $g(x) = x^2 + 4x - 1$ et $h(x) = 2x^2 - 12x + 5$.

Polynôme	Δ	Nb de racines	Racines s'il y en a.
$g(x) = x^2 + 4x - 1$	$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 20$	2 racines	$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-\sqrt{20}}{2}$ et $x_2 = \frac{-4+\sqrt{20}}{2}$
$h(x) = 2x^2 - 12x + 5$	$\Delta = (-12)^2 - 4 \times 2 \times 5 = 104$	2 racines	$x_1 = \frac{12-\sqrt{104}}{4}$ et $x_2 = \frac{12+\sqrt{104}}{4}$

Correction exercice 6. ①

② $Q(x) = x^2 - 3x - 4$

③ $R(x) = 3x^2 - 6x + 2$

④ $H(x) = x^2 + 4x + 4$

Polynôme	Δ	Nb de racines	Racines s'il y en a.
$P(x) = 2x^2 + x - 3$	$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 20$	2 racines	$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-\sqrt{20}}{2}$ et $x_2 = \frac{-4+\sqrt{20}}{2}$
$h(x) = 2x^2 - 12x + 5$	$\Delta = (-12)^2 - 4 \times 2 \times 5 = 104$	2 racines	$x_1 = \frac{12-\sqrt{104}}{4}$ et $x_2 = \frac{12+\sqrt{104}}{4}$