Chapitre 2 : Géométrie plane. Vecteur, droite et base.

Notation : Dans l'ensemble du chapitre, on considérera $\mathscr{P}$ le plan.

1 Un peu d'histoire.

Grassmann Hermann Günther (allemand – 15 avril 1809 à Stettin – 26 septembre 1877 à Stettin) est professeur de mathématiques à Stettin, physicien et indianiste. Étudiant le phénomène des marées, il est amené à développer le calcul vectoriel. Il établit les fondements de la théorie des espaces vectoriels et de l'algèbre linéaire. Ses travaux à son époque n'ont pas été jugés à la hauteur de leur qualité. Carl Ludwig Conrad, ayant à lire un essai de ce mathématicien remarquablement long, en bâcle la lecture en 4 jours (du 26 avril au premier mai 1840). Il rate donc complètement l'importance fondamentale de ce travail.

Grassmann Hermann Günther publia une partie de ses résultats en 1844 dans un traité intitulé « La science des grandeurs extensives ou la théorie de l'espace » (complété en 1863). On lui doit les premières notions suivantes :

- L'indépendance linéaire
- La somme de sous-espaces ;
- Le produit linéaire, correspondant au produit scalaire actuel ;
- Le produit extérieur, qui deviendra, en dimension 3, avec Gibbs et Clifford, notre produit vectoriel usuel ;
- Le théorème des dimensions, qui porte son nom : $dimE + F = dimE + dimF - dimE \cap F$

A la même époque l'irlandais Hamilton introduisait le concept moderne de vecteur. Peano définit de façon axiomatique et plus claire le concept d'espace vectoriel sur un corps de scalaires.
Les applications de ses notions sont fondamentales dans toutes sortes de domaines de la physique notamment : en mécanique (addition de forces, vitesse...) , en thermodynamique (flux...) ...

2 Attendus

- Étudier la colinéairité de deux vecteurs à partir de leurs coordonnées. *page 163 et 167 (ex 11-13 page 170)*
- Utiliser la colinéarité de deux vecteurs pour détemriner si trois points sont alignés. *page 163 (ex 14 page 170)*
- Situer un point sur une droite. *page 163 (ex 17-18 page 170*
- Déterminer une équation cartésienne de droite. *page 165 (ex 19-21 page 170)*
- Déterminer les éléments caractéristiques d'une droite (vecteur directeur, coefficient directeur...). *(ex 22-23 page 171)*
- Représenter une droite à partir de son équation cartienne. *page 165*
- Savoir déterminer si deux droites sont parallèles ou sécantes. *page 165 (24-30 page 171)*
- Savoir déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une nouvelle base. *page 167 (33-34 page 171)*
- Savoir déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base judicieusement choisie en utilisant la **relation de Chasles** notamment et le calcul vetoriel. *page 167 (35-36 page 171)*

3 Colinéarité de deux vecteurs.

3.1 Définition

Définition 1

Dire que deux vecteurs non nuls, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colonéaires signifie qu'ils ont même direction. C'est à dire :

$$\exists k \in \mathbb{R}, \vec{u} = k\vec{v}.$$

On dira du vecteur nul qu'il est colinéaire à tout vecteur.

3.2 Traduction analytique.

Proposition 1

Soient deux vecteurs $\vec{u} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. On a :

$$\vec{u} \quad et \quad \vec{v} \quad colinéaires \Leftrightarrow xy' - x'y = 0$$

Démonstration 1. Deux cas à étudier :

- Si l'un des vecteurs est nul, l'équivalence est évidente (puisque ses coordonnées sont nulles)
- Si les deux vecteurs $\vec{u} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont non nuls. Alors :

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, \vec{u} = k\vec{v} \Leftrightarrow \exists k, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \text{x} & \text{x'} \\ \hline \text{y} & \text{y'} \\ \hline \end{array} \text{ tableau de proportionnalité.}$$
$$\Leftrightarrow xy' - x'y = 0$$

Ex 11-13 page 170

3.3 Étude de l'alignement de 3 points.

Méthode 1

voir *2 page 163*

Ex 14-18 page 170

4 Utilisation de la colinéarité : équation cartésienne de droite.

4.1 Généralité.

Proposition 2

Soit D une droite, A un point de D et $\vec{u}$ un vecteur (non nul) de même direction que D. Alors M est un point de D si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires. C'est-à-dire avec les quantificateurs mathématiques :

$$M \in D \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ colinéaires}$$

4.2 Approche analytique.

4.2.1 Détermination de l'équation cartésienne d'une droite par coliéarité

Proposition 3

Soit D une droite, A$\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ un point de D et $\vec{u} : \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ un vecteur (non nul) de même direction que D. Alors :

$$M : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} : \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \textit{ et } \vec{u} \textit{ colinéaires} \Leftrightarrow \beta x - \alpha y - \beta x_A + \alpha y_A = 0$$

Méthode 2

Vidéo pour décrire comment obtenir l'équation cartésienne d'une droite :
`https://youtu.be/NosYmlLLFB4` et `https://youtu.be/i5WD8IZdEqk`
Référence livre *1 page 165*

Ex 19-21 page 170

4.2.2 Interprétation de l'équation cartésienne de droite.

Proposition 4

Soit l'équation du plan $ax + by + c = 0$. L'ensemble des points dont les coordonnées vérifies cette équation est une droite et $\vec{u} : \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de cette droite.

Démonstration 2. Soient $A : \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $M : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ deux points dont les coordonnées vérifies l'équation.
On a : $ax_A + by_A + c = 0$ et $ax + by + c = 0$. Donc $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$.
Donc les veteurs $\overrightarrow{AM} : \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$ *et $\vec{u}$ sont colinéaires.*
Donc M est sur la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
On vérifie à l'aide de la partie 4.2.1 que tout point de cette droite a ses coordonnées qui vérifient l'équation.

Méthode 3

Vidéo pour le tracé d'une droite : `https://youtu.be/EchUv2cGtzo`.
Référence livre *2 page 165*

Ex 22-23 page 171.

4.2.3 De l'équation cartésienne à l'équation réduite d'une droite.

Proposition 5

Si a, b et c sont trois réels avec $b \neq 0$ alors : $ax + by + c = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

Remarque 1. :

- On passe facilement d'une équation réduite à une équation cartésienne : $y = ax + b \Leftrightarrow -ax + y - b = 0$ et alors $\vec{u} : \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite.
- Si l'équation cartésienne est $ax + by + c = 0$ alors $\frac{-a}{b}$ est le coefficient directeur de l'équation réduite de la droite.

4.2.4 Équations cartésiennes et parallélisme.

Proposition 6

Soient deux droites et leur équation cartésienne : D : $ax + by + c = 0$ et D' : $a'x + b'y + c' = 0$. Alors :

$$D//D' \Leftrightarrow ab' - a'b = 0$$

Démonstration 3. .
$D//D' \Leftrightarrow \vec{u} : \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ *et* $\vec{u'} : \begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$ (les deux directeurs respectivement de D et D') sont colinéaires $\Leftrightarrow ab' - a'b = 0$

Méthode 1. Voir vidéo `https://youtu.be/NjsVdVolhvU` Référence livre *3 page 165*

Ex 24 ; 26-32 page 171

5 Base du plan et coordonnées de vecteurs.

5.1 Définition.

Définition 2

On appelle base du plan tout couple de deux vecteurs non colinéaires.

Remarque 2. Si l'on considère un triangle ABC alors $\left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)$ est une base du plan.

5.2 Décomposition dans une base.

Proposition 7

Soit $(\vec{u}; \vec{v})$ une base du plan. Soit $\vec{w}$ un vecteur quelconque du plan. Alors, il existe deux réel a et b tel que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{b}$. La propriété s'écrit avec les quantificateurs mathématiques :

$$\forall \vec{w} \in \mathscr{P}\ , \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \vec{w} = a\vec{u} + b\vec{b}$$

Définition 3

Avec les notations de la propriété précédente. On dira alors que le couple (a, b) sont les coordonnées de $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u}; \vec{v})$. On note plus volontiers $\vec{w} : \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Méthode 4

Choix de base : `https://youtu.be/4-dKOkNu_p4`. Référence livre *1 page 167*

Ex 33-36 page 171 ; 45 page 173 ; 47-48 page 174.

5.3 Utilisations

La décomposition dans une base permet l'utilisation des formules sur les coordonnées traduisant les propriétés géométriques vues dans les parties précédentes. (colinéarité, parallélisme, alignement...)