Chapitre 3 : Étude de fonctions et fonctions usuelles.

Notation : Pour l'ensemble de ce cours I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

1 Attendus

- Savoir déduire d'une lecture graphique d'une représentation graphique de fonction(s) : ses variations (et son tableau de variation), les solution d'une équation ($f(x) = a$), d'une inéquation ($f(x) > a$ ou $f(x) > g(x)$) , les positions relatives des différentes courbes...
- Déterminer par le calcul les positions relatives de deux courbes. `https://youtu.be/EyxP5HIfyF4`.
- Déterminer les variation d'une fonction par l'étude du signe de $f(b) - f(a)$ avec $a \leqslant b$. `https://youtu.be/TWbjEeiZXnw`
- Connaitre les propriétés des fonctions de référence : `https://youtu.be/qJ-Iiz8TvZ4` , `https://youtu.be/O61rmOdXg9I`,
- Décomposer une fonction (qui s'y prête) en fonctions usuelles.
- Utiliser cette décomposition pour l'étude d'inégalités.
- Utiliser cette décomposition pour l'étude des variations de la fonction.

2 Variation de fonctions.

2.1 Définition

Définition 1

Soit f une fonction définie définie sur I à valeurs réelles (c'est-à-dire : $f : I \to \mathbb{R}$) On dira de f qu'elle est :

- croissante sur l'intervalle I, si pour tout $a, b \in I$ tel que $a \leqslant b$ alors $f(a) \leqslant f(b)$. Avec les quantificateurs :
$$\forall a, b \in I, a \leqslant b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b)$$
- décroissante sur l'intervalle I , si pour tout $a, b \in I$ tel que $a \leqslant b$ alors $f(a) \geqslant f(b)$. Avec les quantificateurs :
$$\forall a, b \in I, a \leqslant b \Rightarrow f(a) \geqslant f(b)$$

Méthode 1. Concrètement : pour démontrer qu'une fonction est croissante ou décroissante sur I, on prend $a, b \in I$ et on étudie le signe de $f(b) - f(a)$. Si sur l'intervalle I, on a **"toujours"** :

- $f(b) - f(a) \geqslant 0$ alors f est croissante sur I.
- $f(b) - f(a) \leqslant 0$ alors f est décroissante sur I.

2.2 Propriété.

Proposition 1

Soit f une fonction définie définie sur I à valeurs réelles (c'est-à-dire : $f : I \to \mathbb{R}$) Si f est :

- croissante sur l'intervalle I, alors $a \leqslant b \Leftrightarrow f(a) \leqslant f(b)$.
- décroissante sur l'intervalle I , alors $a \leqslant b \Leftrightarrow f(a) \geqslant f(b)$.

Démonstration 1. Soit $a, b \in I$. Si on a $a \leqslant bet f(a) \geqslant f(b)$ alors f n'est pas croissante donc si f croissante sur l'intervalle I, alors $a \leqslant b \Leftrightarrow f(a) \leqslant f(b)$.
Idem pour f décroissante.

3 Fonctions carrées.

3.1 Définition.

Définition 2

On appelle fonction **carrée** la fonction :

$$\begin{aligned} [0; +\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

3.2 Variations.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Démonstration 2. .

- Si $0 \leqslant a \leqslant b$ alors $\begin{cases} 0 \leqslant a^2 \leqslant ab & (\textit{En multipliant par } a) \\ & \textit{et} \\ 0 \leqslant ab \leqslant b^2 & (\textit{En multipliant par } b) \end{cases}$. Donc $0 \leqslant a^2 \leqslant b^2$.
  Donc la fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$.
- Si $a \leqslant b \leqslant 0$ alors $\begin{cases} a^2 \geqslant ab \geqslant 0 & (\textit{En multipliant par } a < 0) \\ & \textit{et} \\ ab \geqslant b^2 \geqslant 0 & (\textit{En multipliant par } b < 0) \end{cases}$. Donc $a^2 \geqslant b^2 \geqslant 0$.
  Donc la fonction carré est décroissante sur $[0; +\infty[$.

4 Fonctions racines carrées.

4.1 Définition.

Définition 3

On appelle fonction **racine carrée** la fonction :

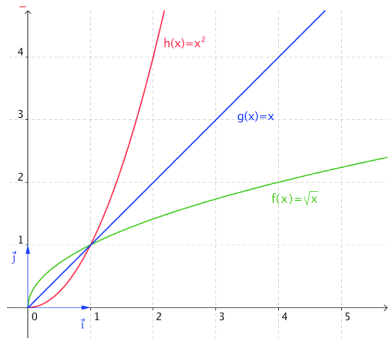
$$\begin{aligned} [0; +\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

4.2 Variations.

x	0		$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Démonstration 3. Puisque $0 \leqslant a' \leqslant b' \Leftrightarrow a'^2 \leqslant b'^2$ (la fonction carrée étant croissante) en posant $a = \sqrt{a'}$ et $b = \sqrt{b'}$ obtient $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b} \Leftrightarrow a \leqslant b$. D'où la croissance de la fonction racine.

4.3 Position relative des représentations : fonction racine, fonction linéaire $g(x) = x$ et fonction racine.



Proposition 2

	Si $0 \leqslant x \leqslant 1$	Si $1 \leqslant x$
Inégalité	$0 \leqslant x^2 \leqslant x \leqslant \sqrt{x}$	$0 \leqslant \sqrt{x} \leqslant x \leqslant x^2$
Position	$\mathcal{C}_{\sqrt{x}}/\mathcal{C}_x/\mathcal{C}_{x^2}$	$\mathcal{C}_{x^2}/\mathcal{C}_x/\mathcal{C}_{\sqrt{x}}$

Démonstration 4. Si $0 \leqslant x \leqslant 1$ alors :

- $0 \leqslant x^2 \leqslant x$ (par multiplication par x).
- Par ailleurs la fonction racine étant croissante sur $[0; +\infty[$ on a

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 1$$

Puis par multiplication par $\sqrt{x}$, on obtient

$$0 \leqslant x \leqslant \sqrt{x}$$

Même méthode de démonstration pour $x \geqslant 0$.

Proposition 3

On a $\mathcal{C}_{x^2}$ et $\mathcal{C}_{\sqrt{x}}$ symétrique par rapport à la première bissectrice (c'est-à-dire $\mathcal{C}_x$)

Démonstration 5. On remarque que si $M(x, \sqrt{x}) \in \mathcal{C}_{\sqrt{x}}$ alors si $M(\sqrt{x}, x) \in \mathcal{C}_{x^2}$ et inversement.

5 Fonction valeur absolue

5.1 Définition.

Définition 4

Soit un points $M(x)$ sur la droite réel repéré par $(O, \vec{i})$. Alors la distance OM est noté $|x|$.

Remarque 1. On constate que :

- si $x \geqslant 0$ alors $|x| = x$.
- si $x \leqslant 0$ alors $|x| = -x$ (l'opposé).

Pour déterminer la valeur absolue, on prend la "valeur positive" du nombre.

5.2 propriétés.

Proposition 4

Soient deux réels x et y, on a les propriétés suivantes :

- $|x| \geqslant 0$
- $|x| = |-x|$
- $\sqrt{x^2} = |x|$
- $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y \text{ ou } x = -y$
- $|xy| = |x| \times |y|$
- $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$ (pour $y \neq 0$)
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Démonstration 6. les démonstrations sont immédiates en considérant la valeur absolue comme la "valeur positive".

5.3 Distance entre deux points.

Proposition 5

Soient deux points $M(x)$ et $N(y)$ ur la droite réel repéré par $(O, \vec{i})$. Alors $MN = |y - x|$.

Démonstration 7. Si $0 \leqslant x \leqslant y$ alors $MN = y - x = |y - x|$.
Si $x \leqslant 0 \leqslant y$ alors $MN = OM + ON = y + |x| = y - x = |y - x|$.
Et ainsi on étudie tous les cas.

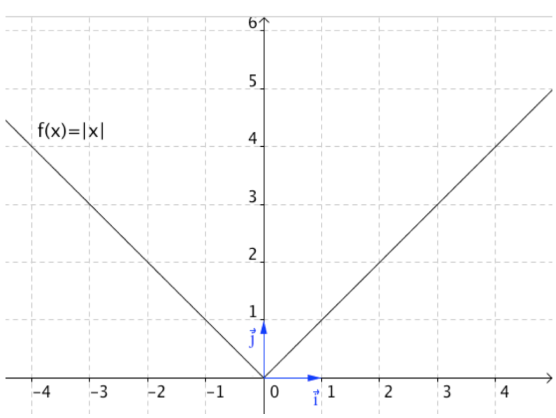
Proposition 6

Inégalité triangulaire : Soit x et y deux nombres réels. On a :

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|$$

Démonstration 8. Si $M(-x)$ et $N(y)$. On a $MN \leqslant OM + ON$ (d'où l'appellation "inégalité triangulaire")

5.4 Fonction valeur absolue.



x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

6 Parité d'une fonction.

Définition 5

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ (ou sur un intervalle I) "symétrique" par rapport à 0) alors :

- On dit que f est paire, si pour tout x (de $\mathbb{R}$ ou de I suivant les cas) $f(-x) = f(x)$.
- On dit que f est impaire, si pour tout x (de $\mathbb{R}$ ou de I suivant les cas) $f(-x) = -f(x)$.

Proposition 7

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ (ou sur un intervalle I) "symétrique" par rapport à 0) alors :

- Si f est paire alors $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Si f est impaire alors $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine.

Démonstration 9. Suivant les deux cas :

- Si f est paire alors, pour $x \in I$ on a $f(x) = f(-x)$ donc pour les deux points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectifs x et $-x$ on a les coordonnées $(x, f(x))$ et $(-x; f(x))$. Ils sont donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Si f est impaire alors,pour $x \in I$ on a $f(-x) = -f(x)$ donc pour les deux points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectifs x et $-x$ on a les coordonnées $(x, f(x))$ et $(-x; -f(x))$. Ils sont donc symétrique par rapport à l'origine.

Remarque 2. Les fonction valeur absolue et carrée étant paire, leur représentation graphique sont symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

7 Décomposition de fonctions en fonctions de référence.

7.1 Exemple.

Exemple 1. Soit la fonction $f(x) = \dfrac{-2}{\sqrt{x^2+1}} - 3$, on a la décomposition :

$x \mapsto x^2$

$x \mapsto x + 1$

$x \mapsto \sqrt{x}$

$x \mapsto \dfrac{1}{x}$

$x \mapsto -2x$

$x \mapsto -3$

7.2 Utilisation : inégalité et variation.

Voir séance du lundi 15 octobre.

8 Sens de variation des fonctions $u+k$, λu , $\sqrt{u}$ et $\dfrac{1}{u}$.

Proposition 8

Si u est une fonction définie sur I (en "un morceau"), k et λ désignant deux réels (non nul), alors :

- la fonction $u+k$ conserve les mêmes variations.
- la fonction λu :
  - conserve les mêmes variations si $\lambda > 0$.
  - Inverse les variations de u si $\lambda < 0$.
- La fonction $\sqrt{u}$ conserve les mêmes variations.
- La fonction $\dfrac{1}{u}$ avec $u(x) \neq 0$ pour tout x de I, inverse les variations de u.
- La fonction u^2 :
  - conserve les mêmes variations si $u > 0$ sur I.
  - Inverse les variations de u si $u < 0$ sur I.