

Chapitre 4 : Probabilité conditionnelle.

Notation : Dans l'ensemble du chapitre, on considérera Ω comme l'univers des possibles. (Par exemple pour le lancer d'un dé à 6 faces $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.)

I Un peu d'histoire.

La théorie des probabilités est une mathématisation de l'incertitude et du caractère imprévisible des phénomènes. L'incertitude de la situation présente et à venir a d'abord été attribuée au destin, à la nature ou à des divinités.

Les philosophes de la Grèce antique ont abordé la question de la définition du concept d'incertitude. Le concept de probable chez Aristote (ive siècle av. J.-C.) est défini dans les Topiques :

« Sont probables les opinions qui sont reçues par tous les hommes, ou par la plupart d'entre eux, ou par les sages, et parmi ces derniers, soit par tous, soit par la plupart, soit enfin par les plus notables et les plus illustres »

Ce qui rend une opinion probable chez Aristote est son caractère généralement admis.

Le véritable début de la théorie des probabilités date de la correspondance entre Pierre de Fermat et Blaise Pascal en 1654 au sujet d'une désormais célèbre question posée par Antoine Gombaud (dit chevalier de Méré) : le problème des partis ou problèmes des points. « Il avait pour objet de déterminer la proportion suivant laquelle l'enjeu doit être partagé entre les joueurs lorsqu'ils conviennent de ne point achever la partie, et qu'il leur reste à prendre pour la gagner, des nombres de points inégaux. » Pascal en donna le premier la solution, mais pour le cas de deux joueurs seulement ; il fut ensuite résolu pour Fermat, dans le cas général d'un nombre quelconque de joueurs.

II Attendus.

- Connaitre l'ensemble des formules de la proposition 1 et leur correspondance en terme d'ensemble.
- Savoir différentier probabilité conditionnelle de la probabilité d'une intersection.
- Connaitre les règles régissant la construction d'un arbre. *méthode 2*
- Savoir construire un arbre à partir des données de l'énoncé. *page 173 et méthode 3*.
- A partir d'un arbre :
 - Savoir interpréter chacune des pondérations de chaque branche. (*Probabilité conditionné par le nœud précédent pour le nœud suivant.*)
 - Savoir déterminer la probabilité d'une intersection (*Branche complète : l'ensemble des branches de l'origine à l'extrémité.*) *méthode 4*
 - Savoir calculer une probabilité total. (*Somme des branches complètes finissant par l'évènement dont on veut calculer la probabilité totale.*) *page 175 méthode 1 et 5*
- Savoir déterminer une probabilité conditionnelle en utilisant la formule :

$$P_C(A) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} \quad \textit{méthode 6}$$

- Obtenir un arbre inverse. *méthode 7*
- Savoir calculer tout type de probabilité à partir d'un tableau de données. *Voir exercice 1*

III Probabilité conditionnelle.

A Exemple de situation.

Exercice 1. Un établissement décide d'organiser un Cross auquel la présence n'est pas obligatoire.

Sur les 540 élèves :

- un tiers sont des élèves de seconde.
- 160 sont des élèves de première.
- 40 % ont décidé de participer au Cross.

Par ailleurs :

- 25 % des élèves de seconde décident de participer au Cross.
- Il y a autant de premières qui ont participé au Cross que de terminales.

Compléter un tableau suivant :

	Nombre d'élèves ayant participé au Cross : C	Nombre d'élèves n'ayant pas participé au Cross : \bar{C}	Total
Élèves de seconde : On notera E_2			
Élèves de première : On notera E_1			
Élèves terminale : On notera E_T			
Total			

Une semaine après, Arthur, qui s'occupe du journal du lycée, décide d'interroger à l'entrée de l'établissement les élèves sur leur ressenti sur le Cross. Il choisit donc un élève au hasard. Complétez le tableau suivant :

Question :	Notation	Calculs et résultats	Remarque :
Probabilité que ce soit un élève qui est participé au Cross.	$P(C)$		
Probabilité que ce soit un élève qui n'est pas participé au Cross.			
Probabilité que ce soit un élève de seconde			
Probabilité que ce soit un élève de première			
Probabilité que ce soit un élève de terminal			
Probabilité que ce soit un élève de seconde et qu'il est participé au Cross	$P(E_2 \cap C)$		
Probabilité que ce soit, un élève de seconde ou qui est participé au Cross	$P(E_2 \cap C)$		

Arthur va a une réunion où ne sont présent que les élèves qui ont participé au Cross. Il décide d'interroger un élève au hasard à la sortie de la réunion. Il **sait** donc que l'élève interrogé a participé au Cross. Compléter le tableau ci-dessous :

Question :	Notation	Calculs	Remarque :
Probabilité que ce soit un élève de seconde sachant qu'il a participé au Cross	$P_C(E_2)$		
Probabilité que ce soit un élève de première sachant qu'il a participé au Cross			
Probabilité que ce soit un élève de terminal sachant qu'il a participé au Cross			

B Probabilité conditionnelle : Définition.

Définition 1

Soit A et B deux événements avec $P(A) \neq 0$.

On appelle **probabilité conditionnelle de B sachant A**, la probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé. Elle est notée $P_A(B)$ ou $P(B/A)$ et est définie par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Exercice 2. On dispose de deux urnes :

- L'urne U, avec 2 boules rouges et une boule noire.
- L'urne V, avec 1 boule rouge et une boule noire.

On lance un dé à 6 faces. Si l'on obtient :

- 1 (événement que l'on notera A) on tire une boule dans l'urne U.
- Sinon (événement que l'on notera \bar{A}), on tire une boule dans l'urne V.

On note :

- R l'évènement : "on obtient une boule rouge lors du tirage".
- N l'évènement : "on obtient une boule noire lors du tirage".

Complétez le tableau si dessous :

Question :	Notation	Résultats
La probabilité d'obtenir "1" lors du lancé.		
La probabilité d'obtenir une boule rouge sachant que l'on a obtenu "1" lors du lancer de dé.		
	$P_A(N)$	
	$P_{\bar{A}}(R)$	

Exercice 3. On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

- Soit A l'évènement "Le résultat est un pique".
 - Soit B l'évènement "Le résultat est un roi".
1. $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ et enfin $P(A \cup B)$.
 2. Déterminer $P_A(B)$ et $P_B(A)$.

Vidéo 1

Corrigé en vidéo.

C Propriétés.

Similitude avec les propriétés des probabilités non conditionnelle :

Proposition 1

Soit A , B et C trois évènements avec $P(C) \neq 0$, alors :

- | | | |
|---|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • $0 \leq P(A) \leq 1$ • $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ • $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ | | <ul style="list-style-type: none"> • $0 \leq P_C(A) \leq 1$ • $P_C(\bar{A}) = 1 - P_C(A)$ • $P_C(A \cup B) = P_C(A) + P_C(B) - P_C(A \cap B)$ |
|---|--|---|

Et la propriété fondamentale :

$$\bullet P_C(A) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} \Leftrightarrow P(A \cap C) = P(C) \times P_C(A)$$

Remarque 1. Les formules vues en première reste vrai dans "l'univers C ".

Remarque 2. Si $C = \Omega$ alors $P_\Omega(A) = P(A)$ et $P(A \cap \Omega) = P(A)$ donc la dernière formule devient évidente :

$$P(A) = P_\Omega(A) = \frac{P(A \cap \Omega)}{P(\Omega)} = \frac{P(A)}{1} = P(A)$$

IV Arbre pondéré.

A Exemple.

Exemple 1. Un établissement décide d'organiser une journée d'information sur les filières post-bac. Cette fois les répartitions sont les suivantes :

Sur les 540 élèves :

- un tiers sont des élèves de seconde.
- un quart sont des élèves de première.

Par ailleurs :

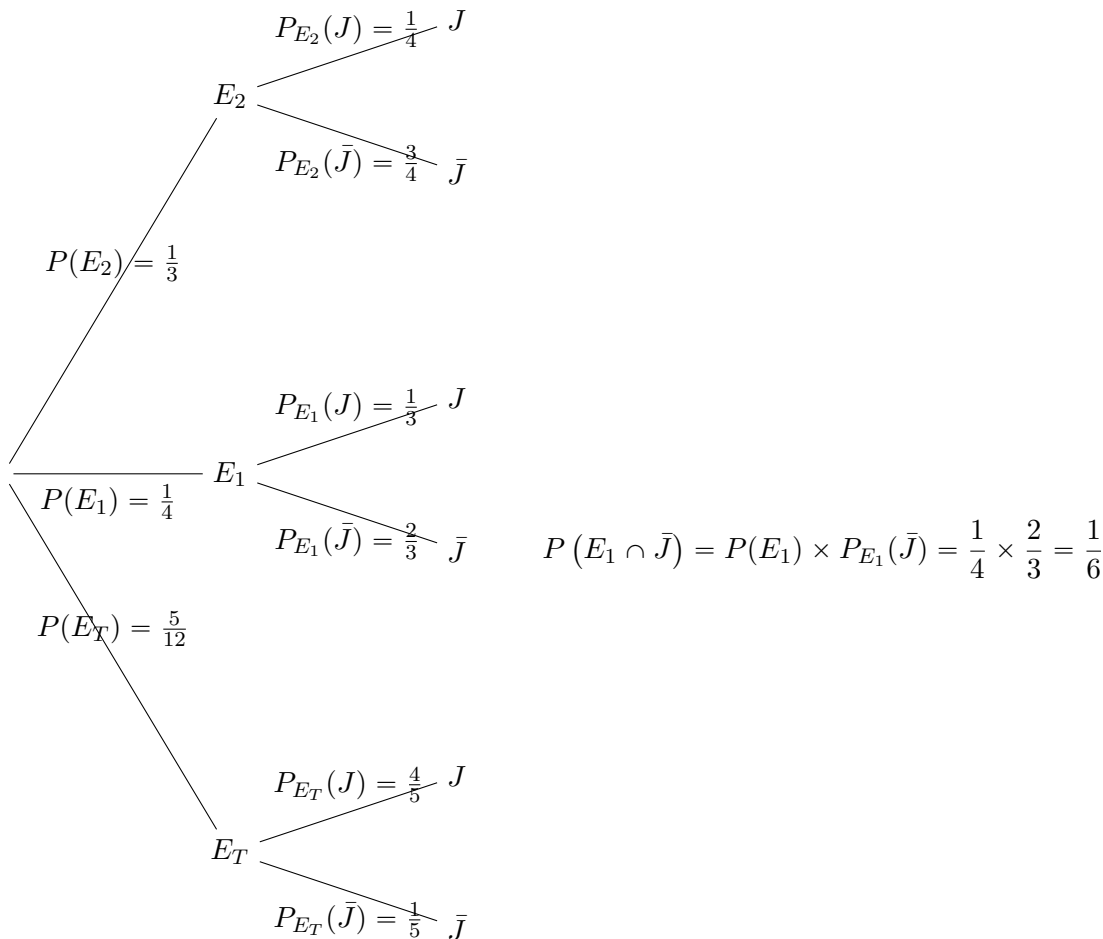
- 25 % des élèves de seconde décident de participer à cette journée.
- Un tiers des élèves de première décident de participer à cette journée.
- Les $\frac{4}{5}$ des élèves de terminale décident de participer à cette journée.

Nous obtenons le tableau suivant :

	Nb d'élèves participant à cette journée J	Nb d'élèves n'ayant pas participé à cette journée : \bar{J}	Total
Élèves de seconde : E_2	50	150	200
Élèves de première : E_1	50	100	150
Élèves terminale : E_T	200	50	250
Total	300	300	600

Une semaine plus tard, Arthur (un élève qui travaille au journal du lycée) décide d'interroger les élèves du lycée sur cette journée. Il choisit au hasard un élève dans la cours.

Nous pouvons traduire cette situation sous forme d'arbre :



L'arbre permet de déterminer les probabilités des intersections notamment :

$$P(A \cap C) = P(C) \times P_C(A)$$

Pour déterminer la probabilité que l'on interroge un élève de première n'ayant pas été à la journée :

$$P(E_1 \cap \bar{J}) = P(E_1) \times P_{E_1}(\bar{J})$$

Voir le calcul au niveau de l'arbre ci-dessus.

Remarquons ici que la pondération entre le nœud E_1 et le nœud \bar{J} représente :

- La probabilité d'interroger un élève n'ayant pas participé au Cross, sachant qu'Arthur interroge un élève de première (probabilité conditionnelle)

Alors que la *branche complète* du nœud d'origine à l'extrémité \bar{J} (c'est-à-dire : $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$) représente :

- La probabilité d'interroger un élève de première (**et**) qui n'a pas participé à la journée. (intersection)

B Formule de probabilité totale.

Définition 2

On dit que les événements A_1, A_2, \dots, A_n forment une partition de l'univers Ω si leur intersection deux à deux est vide et leur union est Ω .

Voir représentation page 174

Exemple 2. Si l'on reprend l'exemple précédent, les événements E_T, E_1 et E_2 forment une partition de l'ensemble des élèves du lycée :

- Par exemple, on ne peut pas être à la fois en première et terminale .
- La réunion des trois niveaux constitue bien l'ensemble des élèves du lycée.

Exemple 3. Si l'on reprend l'exemple précédent, les événements J , et \bar{J} forment une partition de l'ensemble des élèves du lycée :

- Un élève ne peut pas à la fois assister à la Journée et ne pas y assister.
- Un élève a soit assister soit il n'a pas assister à la journée. Donc l'union forme bien l'ensemble des élèves du lycée.

Remarque 3. Un événement et son contraire constitue toujours une partition de l'univers.

Proposition 2

Formule des probabilités totales :

Si les événements A_1, A_2, \dots, A_n forment une partition de l'univers Ω , et B un événement, alors :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$$

Graphique.

Corolaire 3

Avec les notations de la propriété précédente :

$$P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)$$

Démonstration 1. Il suffit pour cela d'utiliser la formule :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

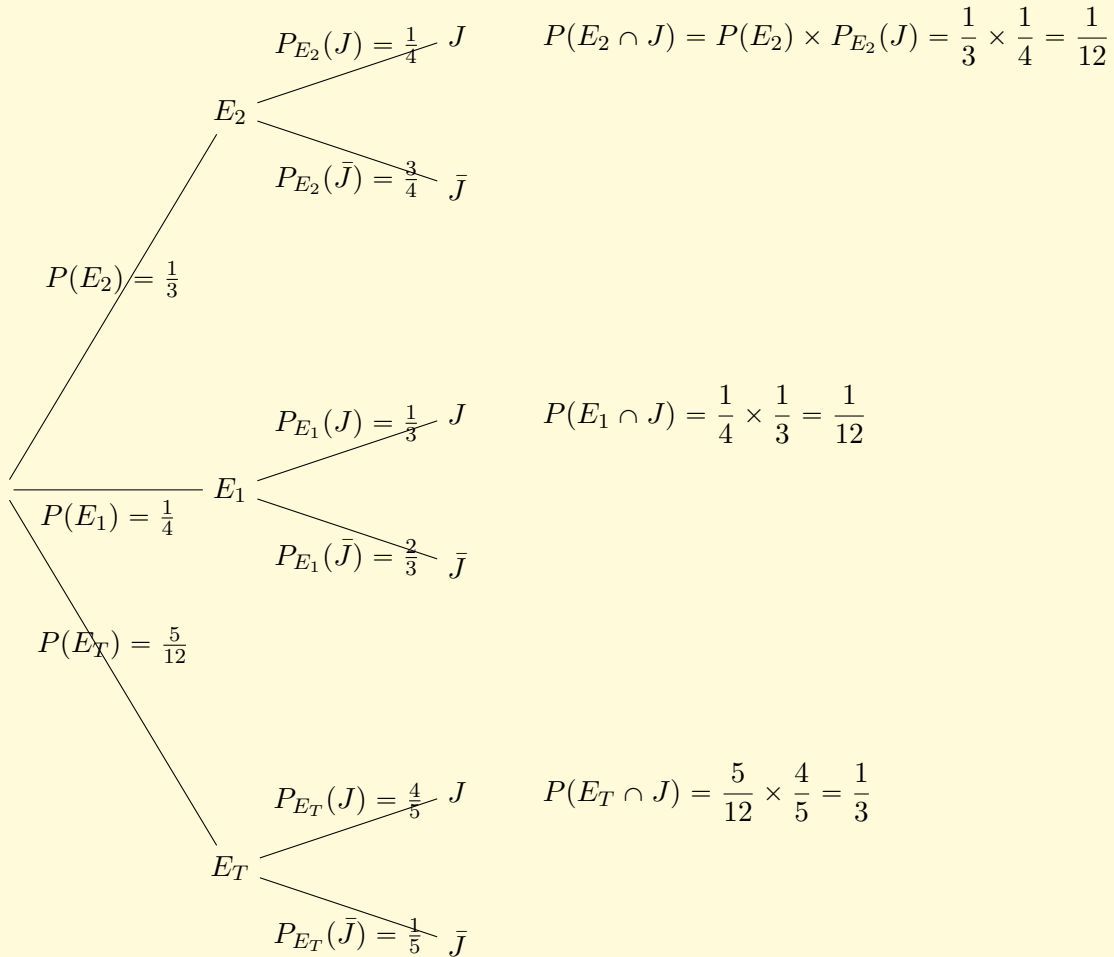
Exemple 4. Si l'on reprend l'exemple précédent en utilisant la partition formé des événements E_T, E_1 et E_2 , pour déterminer la probabilité de J (c'est à dire qu'Arthur interroge un élève ayant participé à la journée d'information) :

$$P(J) = P(E_T) \times P_{E_T}(J) + P(E_1) \times P_{E_1}(J) + P(E_2) \times P_{E_2}(J) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{5}{12} \times \frac{4}{5} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$$

Graphique.

Méthode-exemple 1

Comment procéder pour utiliser la formule de probabilité totale en utilisant un arbre :



Pour déterminer la probabilité de J en utilisant l'arbre, on peut simplement faire la somme des *branches complètes* finissant par J :

$$P(J) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

Corolaire 4

Soit A et B deux évènements de ω , alors

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

Graphique.

C Règles de fonctionnement d'un arbre pondéré.

Méthode-exemple 2

- La somme des probabilités des *branches* issues d'un même nœud est égale à 1 : **La somme des probabilités (conditionnelle) issues de E_2 est bien égale à 1 (en effet $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$.**
- La probabilité d'une *branche complète* est la probabilité de l'intersection des évènements la constituant et est obtenue par le produits des pondérations.

$$P(E_2 \cap J) = P(E_2) \times P_{E_2}(J) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

- (Formule des probabilités totales) La probabilité d'un évènement de *dernier niveau* est obtenu en faisant la somme des probabilité des *branches complètes* finissant par cet évènement.

$$P(J) = P(E_T) \times P_{E_T}(J) + P(E_1) \times P_{E_1}(J) + P(E_2) \times P_{E_2}(J) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{5}{12} \times \frac{4}{5} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$$

- **Faire attention** qu'à chaque niveau de l'arbre, les évènements le constituant forme bien une partition de l'univers)
 - Les évènements E_T , E_1 et E_2 forment une partition de l'ensemble des élèves du lycée.
 - Les évènements J , et \bar{J} forment une partition de l'ensemble des élèves du lycée.

D Récapitulatif des attendues sur un exemple.

Énoncé : On dispose de deux urnes :

- L'urne U, avec 2 boules rouges et une boule noire.
- L'urne V, avec 1 boule rouge et une boule noire.

On lance un dé à 6 faces. Si l'on obtient :

- 1 (évènement que l'on notera A) on tire une boule dans l'urne U.
- Sinon (évènement que l'on notera \bar{A}), on tire une boule dans l'urne V.

On note :

- R l'évènement : "on obtient une boule rouge lors du tirage".
- N l'évènement : "on obtient une boule noire lors du tirage".

Méthode-exemple 3**Obtenir l'arbre pondéré :**

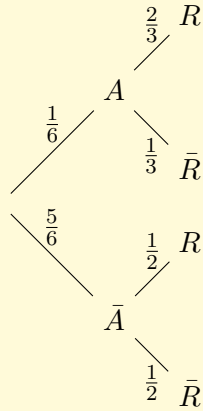
On détermine les probabilité du premier niveau :

$$P(A) = \frac{1}{6} \quad \text{donc} \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{5}{6}$$

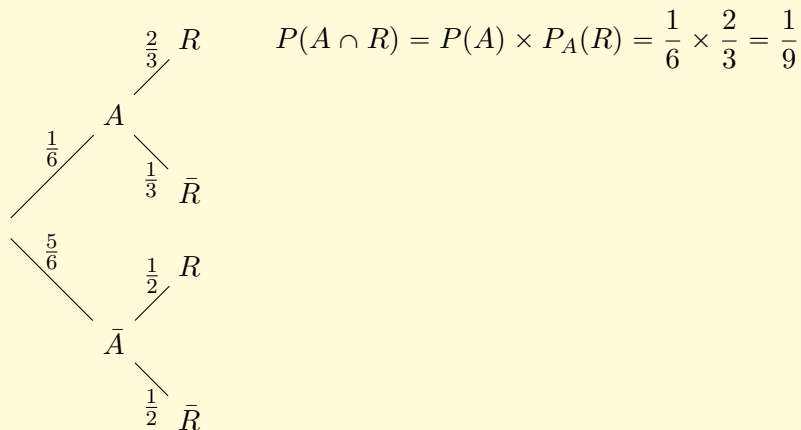
Puis les probabilité conditionnelles du deuxième niveau :

$$P_A(R) = \frac{2}{3} \quad \text{donc} \quad P_A(\bar{R}) = 1 - P_A(R) = \frac{1}{3}. \quad \text{Par ailleurs} \quad P_{\bar{A}}(R) = \frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad P_{\bar{A}}(\bar{R}) = \frac{1}{2}$$

D'où l'arbre :

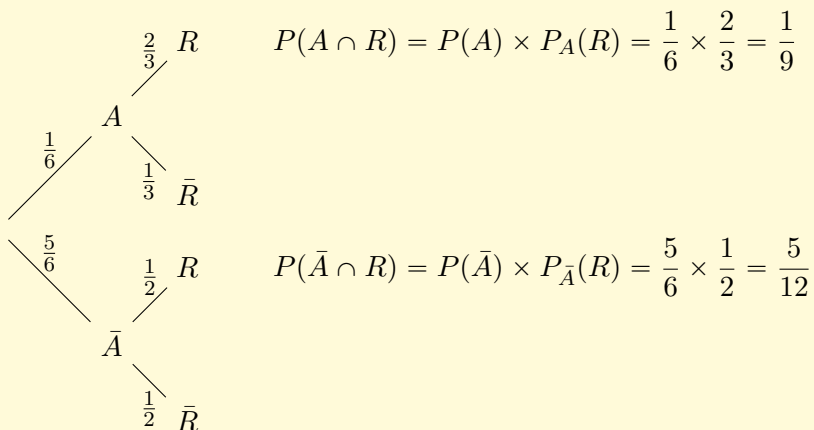
**Méthode-exemple 4****Pour déterminer la probabilité d'une intersection.**

Par exemple, pour déterminer la probabilité "d'avoir obtenu "1" et d'avoir tiré une boule rouge " :



Méthode-exemple 5**Pour déterminer une probabilité totale :**

Par exemple celle de l'évènement R : "obtenir une boule rouge".



$$\text{Donc } P(R) = P(A \cap R) + P(\bar{A} \cap R) = \frac{1}{9} + \frac{5}{12} = \frac{19}{36}$$

Méthode-exemple 6**Déterminer la probabilité conditionnelle d'un niveau 1 relativement à un niveau 2 :**

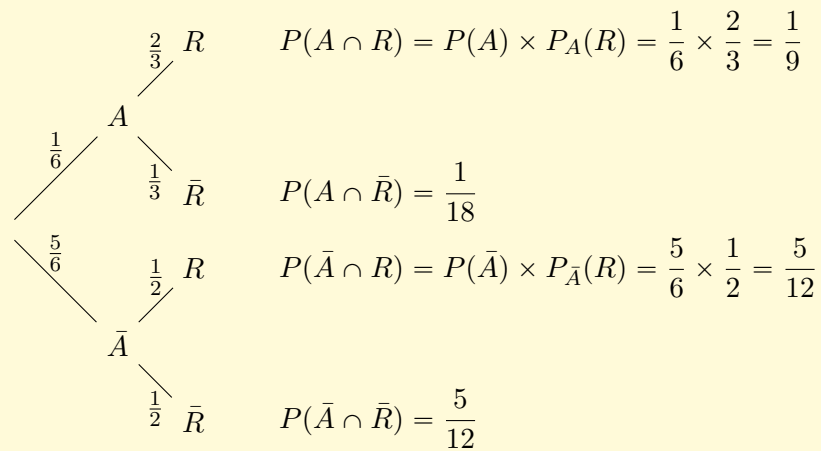
Imaginons maintenant que l'on arrive après le tirage de la boule et que l'on voit quelle est rouge. Ceci sans connaître le résultat du lancé du dé. Sachant que la boule tirée est rouge quelle est la probabilité que l'on est obtenu "1" lors du lancé :

$$P_R(A) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{19}{36}} = \frac{1 \times 36}{9 \times 19} = \frac{4}{19}$$

Remarque 4. On remarque ici que $P(A) = \frac{1}{6}$ alors que $P_R(A) = \frac{4}{19} > \frac{1}{6}$. Or ceci est logique puisqu'il y a deux fois plus de boule rouge dans l'urne U.

Méthode-exemple 7

Obtenir l'arbre inverse :



Donc

$$P(\bar{R}) = \frac{1}{18} + \frac{5}{12} = \frac{17}{36}$$

Puis :

$$P_{\bar{R}}(A) = \frac{P(A \cap \bar{R})}{P(\bar{R})} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{17}{36}} = \frac{36}{18 \times 17} = \frac{2}{17}$$

On obtient donc l'arbre inverse :

