Chapitre 7 : Lois à densité.

I Exemples.

Exercice 1. Voir séance du lundi 11 mars.

Remarque 1. Dans l'exemple précédent, la loi de probabilité de la variable X est dite loi à densité de densité f. La fonction $F(x) = P(X \leqslant x)$ est appelée la fonction de répartition de X.

Exercice 2. Voir séance du lundi 11 mars.

Définition 1

Pour une variable aléatoire X, de densité f, on définie la probabilité d'être sur un intervalle $[a, b]$ par :

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

Vidéo 1

- Exemple 1 de loi à densité
- Exemple 2 de loi à densité

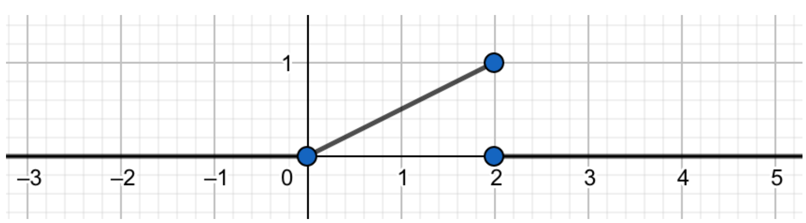
II Loi uniforme sur $[a, b]$.

A Introduction.

Exercice 3. Dans cet exercice, on considère la fonction densité définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 0,5x & si\ 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 & si\ x \geqslant 2 \end{cases}$$

On note X la variable aléatoire de densité f. On a la représentation graphique :



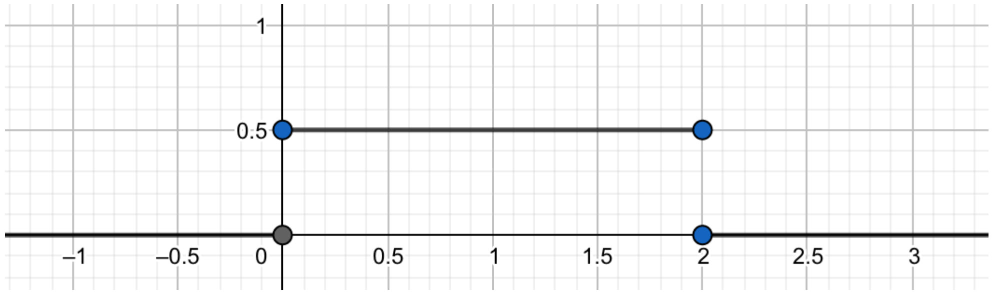
Déterminer les valeurs des probabilités suivantes :

a) $P(-1 \leqslant X \leqslant 0)$
b) $P(0 \leqslant X \leqslant 1)$
c) $P(-1 \leqslant X \leqslant 1)$
d) $P(X \leqslant 1)$
e) $P(X \geqslant 1)$
f) $P(X \geqslant 2)$

Exercice 4. Dans cet exercice, on considère la fonction densité définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 0,5 & si\ 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 & si\ x \geqslant 2 \end{cases}$$

On note X la variable aléatoire de densité f. On a la représentation graphique :



Déterminer les valeurs des probabilités suivantes :

a) $P(-1 \leqslant X \leqslant 0)$
b) $P(0 \leqslant X \leqslant 1)$
c) $P(-1 \leqslant X \leqslant 1)$
d) $P(X \leqslant 1)$
e) $P(X \geqslant 1)$
f) $P(X \geqslant 2)$

B Définition.

Définition 2

On dira d'une variable aléatoire à densité X quelle suit la loi uniforme sur $[a; b]$, si sa densité f est une fonction constante définie sur $[a; b]$.

C Densité de la loi uniforme.

Proposition 1

La densité de la loi uniforme uniforme sur $[a; b]$ est la fonction f définie sur sur $[a; b]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

Exemple 1. Voir exercice 4.

D Propriétés de la probabilité.

Proposition 2

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[a; b]$. Si $[c; d] \in [a; b]$ alors :

$$P\left(X \in [c; d]\right) = \frac{d-c}{b-a}$$

Vidéo 2

exemple

E Espérance.

Définition 3

L'espérance d'une variable aléatoire X de densité f sur $[a;b]$ est le nombre réel :

$$E(X) = \int_a^b t f(t) \mathrm{d}t$$

Proposition 3

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[a;b]$. Alors :

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

Exemple 2. Pour l'exercice 4 l'espérance est donc 1.

III Loi normale.

A Loi normale centrée réduite.

Définition 4

On dira d'une variable aléatoire à densité T quelle suit la loi normale centrée réduite, notée $\mathcal{N}(0;1)$, si sa densité f est la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \mathrm{e}^{\frac{-t^2}{2}}$$

Proposition 4

Si T suit la loi normale centrée réduite, alors :

- $E(T) = 0$
- $P(T \leqslant 0) = P(X \geqslant 0) = 0,5$
- Si $t \in \mathbb{R}$ alors $P(T \leqslant -t) = 1 - p(T \leqslant t)$

B Loi normal $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$.

Définition 5

Une variable aléatoire X suit une loi normale de paramètre μ et σ si la variable $T = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ si la loi normale centré réduite.
On note $X \sim \mathcal{N}(\mu;\sigma)$.

Proposition 5

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu;\sigma)$ alors l'espérance de X est μ.

Vidéo 3

Remarques sur les lois normales

C A la calculatrice.

Si l'on note X le temps d'attente à un guichet à la poste et que l'on sait que X suit une loi normale de paramètre $\mathcal{N}(4;1)$. On souhaite déterminer la probabilité qu'une personne attente entre 2 et 5 minutes.

	avec la TI	Avec la Casio.
Pour déterminer une probabilité.	"2^{nde}" et "VAR/Distrib" puis saisir normalFRéq(2,5,1,4)	"OPTN" puis "STAT" puis "DIST" puis "NORM" enfin "NCD" puis saisir NormCD(2,5,1,4)
Pour résoudre : . $P(X \leqslant \alpha) = 0,95$ (par exemple.)	"2^{nde}" et "VAR/Distrib" puis saisir normalFRéq(70,100,80,14)	"OPTN", puis dans l'ordre "STAT", "DIST" "NORM" et "Ncd" puis saisir NormCD(70,100,14,80)

Vidéo 4

- Loi centrée réduite.
- Loi normale quelconque
- Exemple.