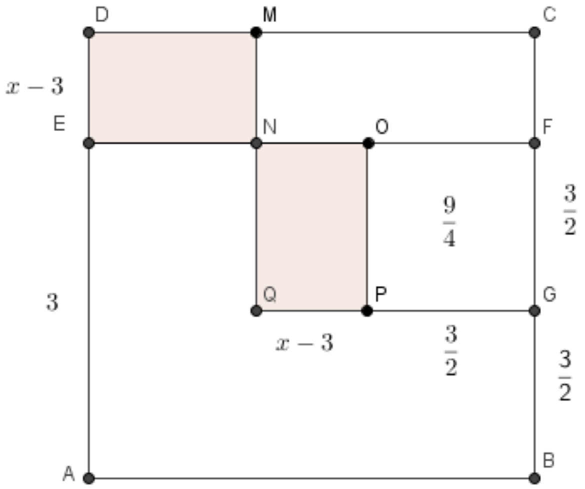
Chapitre 1 : Second degré.

Notation : : Dans l'ensemble du cours, on considère $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a,b et c des réels et $a \neq 0$.

I Un peu d'histoire.

Les premières équations du second degré répertorié sont du à dans son ouvrage *"Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison"*. Il y décrit et résout les 6 équations s du second degré ainsi que les méthodes pour s'y ramener. Les mathématiques se détachent progressivement de la contrainte géométrique : c'est la naissance de l'algèbre. Dans son ouvrage on trouve notamment la résolution de l'équation : $3x + 4 = x^2$. Les mathématiques se détachent progressivement de la contrainte géométrique : c'est la naissance de l'algèbre.

al-Khawarizmi (780-850)



Le problème est le suivant. On construit un rectangle ABFE de côté $AB = x$ et $AE = 3$ et l'on veut déterminer $x > 3$ de sorte que dans le carré ABCD, l'air du rectangle CDEF soit de 4.

II Attendus

Page 45 les "Gammes".

- Savoir représenter une fonction polynôme de degré 2.
- Déterminer la forme canonique d'une fonction polynôme de degré 2.
  - Á partir de la forme développée *1 page 49*
  - Á partir d'un graphique
  - Á partir de l'extremum et d'un point
- Déterminer la forme factoriser d'une fonction polynôme de degré 2. *2 page 51*
  - Á Partir de la forme développée
  - Á partir de la représentation graphique
- Déterminer les variations d'une fonction polynôme de degré 2. (Utilisation de la forme canonique) *2 page 49*
- Déterminer l'extremum d'une fonction polynôme de degré 2. (Utilisation de la forme canonique)
- Savoir utiliser la forme adéquate permettant la résolution d'un problème (forme développée, factorisée ou canonique)
- Détermination du discriminant et des racines d'une fonction polynôme de degré 2.
- Déterminer le signe d'une fonction du second degré. *1 page 53*
- Résolution d'équation et d'inéquation du second degré. *1 page 51 et 2 page 53*
- Savoir utiliser les relations entre les racines. *3 page 51*

III Démonstrations.

- Obtenir la forme canonique de $f(x) = ax^2 + bx + c$.
- Pouvoir justifier le nombre de racine(s) en fonction du discriminant.
- Trouver les expressions des racines.
- Pouvoir justifier les tableaux de signe dans les différents cas.

page 54

IV Fonction polynômes du second degré

A Définition

Définition 1

On appelle **fonction polynomiale du second degré** toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ et de la forme

$$f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$$

avec a,b et c des réels et $a \neq 0$. Ce sont les **coefficients** de la fonction polynomiale.

***Remarque* 1.** Une fonction polynôme de degré 2 s'appelle également fonction trinôme du second degré ou par abus de langage "trinôme".

B Forme Canonique

Proposition 1

On considère une fonction polynomiale f telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$. La fonction f peut s'écrire sous la forme $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$. Cette expression est appelée **forme canonique** de la fonction polynomiale f.

***Vidéo* 1.** Obtenir la forme canonique.

Démonstration 1. On considère une fonction polynomiale f telle que $f(x) = ax^2 + bx + c$.
$1^{ière}$ étape : Factorisation par a

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

2*ième* étape : On fait apparaître l'identité remarquable $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ dans l'expression que l'on trouve dans la parenthèse

$$f(x) = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c$$

$3^{ième}$ étape : On applique l'identité remarquable précédente :

$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c$$

$4^{ième}$ étape : On développe le a :

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$$

Proposition 2

On a obtenu les expressions de $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha) = \frac{-b^2+4ac}{4a}$. Par ailleurs l'expression de la forme canonique permet de justifier que la fonction polynôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ admet pour extremum β et que cet extremum est obtenu en $x = \alpha$.

***Remarque* 2.** Il sera bien plus simple d'utiliser $f(\alpha)$.

***Vidéo* 2.** Obtenir une forme canonique

***Vidéo* 3.** Obtenir l'extremum d'une fonction polynôme du second degré

Démonstration 2. Si $a > 0$
$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0 \iff a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0 \iff a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a} \geqslant -\frac{b^2-4ac}{4a} \iff f(x) \geqslant \beta$
On remarque ici que l'extremum est un mimimun.

C Fonction polynomiale du 2^{sd} degré : variation.

Soit f une fonction polynomiale de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$. On peut distinguer 2 cas :

— Si $a > 0$ alors on a une courbe et un tableau de variation de la forme suivante :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	β	↗ $+\infty$

— Si $a < 0$ alors on a un tableau de variation de la forme suivante :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	β	↘ $-\infty$

Remarque 3. L'extremum de la fonction dans les deux cas est $f(\alpha)$ et atteint en $x = \frac{-b}{2a}$.

V Résolution d'(in)équations du second degré

Dans cette partie nous allons donner une méthode pour résoudre les équations ou inéquations mettant en jeu une fonction polynomiale du second degré.

A Racine(s) et Discriminant.

Définition 2

On appelle **racine** de f tout nombre réel x tel que $f(x) = 0$.
On appelle **discriminant** de $f(x) = ax^2 + bx + c$ et l'on note Δ, le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

On peut remarquer que $\beta = -\frac{\Delta}{4a}$

Proposition 3

On considère $f(x) = ax^2 + bx + c$ et son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. On distingue alors 3 cas :

— **Si** $\Delta > 0$ alors l'équation f possède 2 racines x_1 et x_2 telles que

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

et f peut être factorisé sous la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

— **Si** $\Delta = 0$ alors l'équation f possède 1 unique racine x_0 appelé racine double, est :

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

et f peut se factoriser sous la forme $f(x) = a(x - x_0)^2$.

— **Si** $\Delta < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solutions réelle.

Remarque 4. Il faut que vous soyez capable d'avoir une idée de la représentation graphique de f dans chacun des 3 cas.

Remarque 5. La forme factorisée nous permet alors aisément de donner le tableau de signe de f (voir paragraphe suivant).

Vidéo 4. Exemple 1
Vidéo 5. Exemple 2
Vidéo 6. Exemple 3
Vidéo 7. Factoriser un trinôme.

Démonstration 3. A partir de la forme canonique obtenu lors de la démonstration 1 :

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right) = a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$= a\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

Attention : on suppose ici que $\Delta > 0$. On applique l'identité remarquable : $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

La recherche des racines devient donc :

$$f(x)=ax^2+bx+c=0 \Longleftrightarrow a\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0 \underbrace{\Longleftrightarrow}_{produit\ nul} x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\ ou\ x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Dans le cas particulier où $\Delta=0$, on obtient : $f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x-\frac{-b}{2a}\right)^2$

B Relations entre racines et coefficients

Proposition 4

On obtient les deux relations suivantes : $\begin{cases} ax_1x_2=c \\ a(x_1+x_2)=-b \end{cases}$

Remarque 6. Avant de calculer le discriminant il peut être intéressant de chercher si f possède une racine évidente. En effet, si l'on connait une racine x_1 de f alors il est facile de trouver la deuxième puisque $ax_1x_2=c$ ou $a(x_1+x_2)=b$.

C Signe d'un trinôme.

Proposition 5

On obtient les 3 situations suivantes :

— **Si** $\Delta>0$ alors le signe de $f(x)=a\,(x-x_1)\,(x-x_2)$ est donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe de -a	0	signe de a	

— **Si** $\Delta=0$ alors le signe de $f(x)=a\,(x-x_0)^2$ est donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
		signe de a	0	signe de a	

— **Si** $\Delta<0$ alors le signe de $f(x)=a\left((x-\alpha)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)$ (On peut observer $(x-\alpha)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\geqslant -\frac{\Delta}{4a^2}$) est donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
		signe de a	

Remarque 7. Ces résultats sont immédiats au regard des formes factorisées.

Vidéo 8. et Étude de signe

D Résolution d'inéquation du second degré.

Pour résoudre une inéquation du second degré l'objectif sera d'utiliser ce que l'on sait sur le signe d'un trinôme (partie précédente)

Vidéo 1

Vidéo : Exemple de résolution d'équation.