Chapitre 1 : Suites géométriques

1 Un peu d'histoire.

La notion de suite est présente dès qu'apparaissent des procédés illimités de calcul. En Égypte vers 1700 av. J.-C déja. Chez Archimède (-287 à -212), spécialiste des procédés illimités d'approximation (séries géométriques de raison 1/4) pour des calculs d'aires et de volumes.
Plus récemment au 1^{ier} siècle apr. J.-C. dans le procédé d'extraction d'une racine carrée par la méthode de Héron d'Alexandrie :

Pour extraire la racine carrée de A, on chosit un nombre arbitraire a et prendre la moyenne entre a et A et recommencer aussi loin que l'on veut le processus précédent.
En notation moderne, cela définit la suite de nombres $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{A}{u_n}\right)$.
La conjecture de Syracuse, encore appelée conjecture de Collatz : on part d'un nombre entier plus grand que zéro ; s'il est pair, on le divise par 2 ; s'il est impair, on le multiplie par 3 et on ajoute 1. En dépit de la simplicité de son énoncé, cette conjecture défie depuis de nombreuses années les mathématiciens.

2 Attendus

- Savoir modéliser une situation donnée par une suite. *(page 17)*
- Trouver l'expression permettant d'exprimer u_n en fonction de n et savoir l'appliquer pour trouver n'importe quel terme de la suite. *(39-41 page 25)*
- Déterminer la raison et le premier terme d'une suite géométrique à partir de deux termes de la suite. *(Á voir lors du chapitre sur le logarithme.)*
- Savoir reconnaître une suite géométrique. *(28-35 page 24)*
- Savoir déterminer la somme de termes d'une suite géométrique. *(page 17 / 48 ;49 page 25)*
- Savoir déterminer la limite d'une suite géométrique à partir de son premier terme et de sa raison. *(page 19 / 52-59 page 26)*
- Savoir déterminer la limite de la somme des termes d'une suite géométrique. *(page 19 / 60-63 page 26)*
- Lorsque $0 < q < 1$, savoir déterminer à partir de quel rang q^n est inférieur à un nombre $a > 0$ donné. *(23 page 23)*
- Exercices de synthèse : *page 31 à 33*
- Exercices d'approfondissement : *97 ;103 page 34-36*

3 Suites géométriques

3.1 Définition

Définition 1. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison q signifie que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = q \times u_n$$

Remarque 1. Cette définition reste valable même si le premier terme de la suite n'est pas u_0. Il arrive souvent que le premier terme de la suite soit u_1.

3.2 Expression en fonction de n.

Proposition 1. *Si la suite (u_n) est géométrqiue de raison q, alors*

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 : u_{n+1} = q^n \times u_0 = q^n \times u_p$$

3.3 Reconnaître une suite géométrique.

Proposition 2. *Toute suite dont le terme générale peut s'écrire sous la forme aq^n est une suite géométrique de raison q.*

4 Somme des termes d'une suite géométrique.

4.1 Forme au programme

Proposition 3. Pour q un réel différent de 1 et un entier n, on a :

$$1 + q + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

4.2 Autre formulation

Proposition 4. La somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q est donnée par :

$$1^{ier} terme \times \frac{1-q^{nb\ de\ termes}}{1-q}$$

Vidéo montrant comment procéder : `https://youtu.be/rIaYMXPbWE8`

5 Limite d'une suite géométrique.

5.1 Limite de q^n.

*Proposition 5. Soit q un réel **strictement positif**. On observe les deux cas suivants :*

- *Si $0 < q < 1$ alors $lim_{n\to+\infty} q^n = 0$.*
- *Si $q = 1$ alors $lim_{n\to+\infty} q^n = q$.*
- *Si $1 < q$ alors $lim_{n\to+\infty} q^n = 0$.*

5.2 Limite d'une suite géométrique.

On considère ici u_n comme une suite géométrique.

	1^{ier} *terme* > 0	1^{ier} *terme* < 0
Si $0 < q < 1$	$u_n \longrightarrow 0$	$u_n \longrightarrow 0$
Si $1 = q$	u_n *constante*	u_n *constante*
Si $1 < q$	$u_n \longrightarrow +\infty$	$u_n \longrightarrow -\infty$

Video montrant comment procéder `https://youtu.be/F-PGmIK5Ypg` *et* `https://youtu.be/2BueBAoPvvc`

5.3 Variation d'une suite géométrique.

On considère ici u_n comme une suite géométrique.

	1^{ier} *terme* > 0	1^{ier} *terme* < 0
Si $0 < q < 1$	$u_n \searrow 0$	$u_n \nearrow 0$
Si $1 = q$	u_n *constante*	u_n *constante*
Si $1 < q$	$u_n \nearrow +\infty$	$u_n \searrow -\infty$

5.4 "Rapidité" de la convergence vers 0

Lorsque $0 < q < 1$ et que le premier terme est positif, on peut déterminer le rang à partir du quel les termes de la suite sont plus petit qu'un réel $A > 0$ donné. Voici un algorithme qui fonctionne :

$1^{iére}$ *étape affectation et saisie :*

- *choisir A*
- *n=0*
- *Entrer $u = 1^{ier} terme$ et $q = raison$*

2*ième étape : boucle "tant que"*

- *Tant que $u_n \geqslant A$ faire*
  - $n \longleftarrow n + 1$
  - $u \longleftarrow u \times q$

$3^{ième}$ *étape : afficher n.*