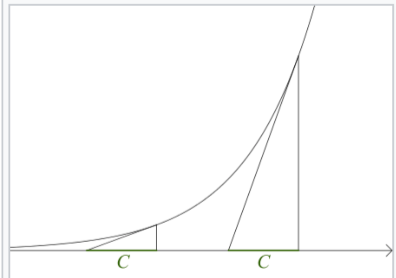
Chapitre 2 : La fonction exponentielle

1 Un peu d'histoire.

Vers 1605-1610, Jost Bürgi conçoit des tables de correspondances entre une suite géométrique de premier terme 10^8 et de raison 1,000 1 (nombres noirs arrondis à l'unité) et une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 10 (nombres rouges). À une multiplication dans les nombres noirs suivie d'une division par 10^8 correspond alors une addition dans les nombres rouges. Pour calculer le produit de deux nombres (noirs), il suffit de rechercher leur correspondant rouge, d'en faire la somme (rouge), d'en rechercher le correspondant noir et de le multiplier par 10^8. On relit ainsi les progressions exponentielles (géométrique) au progression logarithmique (arithmétique).

Par la suite, au cours du XVII siècle les mathématiciens s'intéressent au problème des tangentes (comment tracer les tangentes à une courbe) et le problème inverse des tangentes (comment, connaissant une propriété sur les tangentes, reconstituer la courbe correspondante). La résolution de ces deux problèmes va être grandement facilitée par la mise en place du calcul différentiel chez Newton et Leibniz principalement dans la seconde moitié du siècle. C'est à l'occasion de problèmes de ce genre que les mathématiciens vont faire leur troisième rencontre avec les logarithmes. En 1638, Florimond de Beaune, qui travaille sur un problème de corde vibrante, demande à René Descartes de déterminer la courbe dont la tangente vérifie une certaine propriété. En 1639, Descartes ramène le problème à la recherche d'une courbe dont la sous-tangente serait constante. La sous-tangente est la distance qui sépare le projeté du point M sur l'axe des abscisses et l'intersection de la tangente en M avec ce même axe des abscisses :



Une fonction exponentielle et ses sous-tangentes constantes : si la courbe a pour équation $y = a^x$, la constante vaut $1/\ln(a)$

Traduit en langage actuel, cela consiste à chercher la courbe d'équation y= f(x) sachant que $\frac{f}{f'} = C$. Cette équation différentielle a pour solutions les courbes d'équation :

$$y = Ae^{\frac{x}{C}}$$

Nous ne choisirons pas cette approche pour l'introduction de la fonction exponentielle mais plutôt celle des suites géométriques vues au chapitre précédent.

2 Pré-requis

- Calculs de dérivée.
- Formules sur les puissances.

3 Attendus

- Déterminer à partir d'une courbe la fonction exponentielle de base q qu'elle représente. *1 page 41* (Ex 45 page 48)
- Savoir manipuler les propriétés algébriques de l'exponentielle pour simplifier une expression. *2 page 41* (Ex 36-37 page 48 / 48-49 page 49)
- Savoir déterminer les variations d'une fonction de base q.
- Connaitre les formules de dérivation et déterminer les dérivées de fonctions faisant intervenir l'exponentielle (e^x). *10 page 43 et 16 page 43* (Ex 56 page 49)
- Savoir utiliser la formule $(e^u)' = u'e^u$. *16 page 45* (Ex 63-64 page 50)
- Savoir étudier les variation d'une fonction. *10 page 43* (Ex 18 ;19 page 45 / 54 ;58 page 49 / 65 page 50 ;)
- Savoir déterminer l'équation d'une tangente. (Ex 19-20 page 45 / 52 page 49)
- Déterminer la position relative de deux représentations. (Ex 21-23 page 45)
- Résoudre des équations et des inéquations. (Ex 50-51 page 49)
- Faire une étude de fonction : calcul de la dérivée et tableau de variation. (Ex 54 ;58 page 49 / 65 page 50 / 68 ;69 page 51)
- Trouver des extremums à partir de l'étude de la fonction.

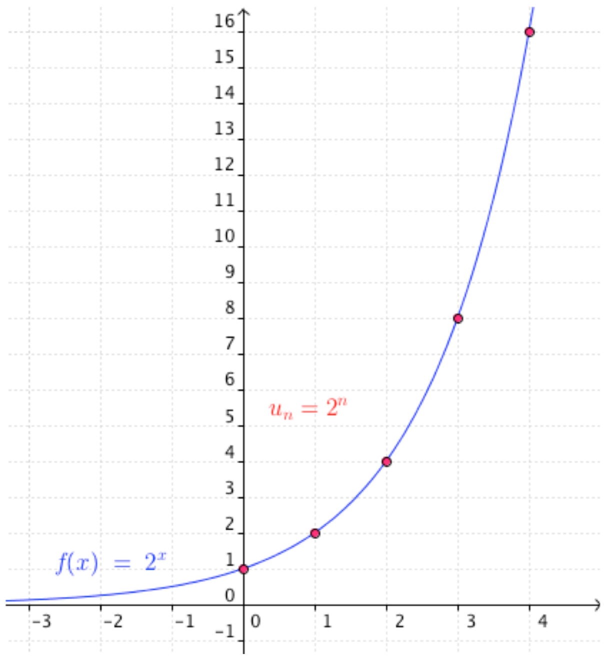
4 Fonction exponentielle de base q.

4.1 Lien avec les suites géométrique :

Si l'on considère les valeurs de la suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $q = 2$ (c'est-à-dire $u_{n+1} = u_n \times q$) on obtient le tableur de valeur.

indice n	0	1	2	3	4	5
Valeur de u_n	1	2	4	8	16	32

L'expression de u_n en fonction de n est $u_n = 2^n$. D'où la représentation :



En bleu (sur le document en ligne) nous avons la représentation de la fonction $f(x) = 2^x$ qui passent par les points de coordonnées $(n; u_n)$.
Cette fonction f est appelée, **fonction exponentielle en base 2**.

4.2 Définition de la fonction exponentielle en base q. ($q > 0$)

Définition 1. La fonction $f_q(x) = q^x$ est appelée **fonction exponentielle en base q**.

Remarque 1. Nous pouvons remarquer que $f_q\left(\frac{1}{2}\right) = q^{\frac{1}{2}} = \sqrt{q}$ (intersection de la courbe représentative de f_q et la droite verticale d'équation $x = \frac{1}{2}$.)

4.3 Propriétés des puissances et fonction exponentielle de base q

Proposition 1. *"L'image d'une somme est égale au produit des images" :*
Soit x et y deux réels, on a $q^{x+y} = q^x \times q^y$.

Proposition 2. *Soit x et y deux réels :*

- $q^0 = 1$ *et* $q^1 = q$ *(l'image de 0 est 1 et l'image de 1 est q.)*
- $q^{-x} = \dfrac{1}{q^x}$
- $q^{y-x} = \dfrac{q^y}{q^x}$
- $(q^x)^y = q^{xy}$

Méthode 1. Simplifier une expression : `https://youtu.be/PHTOZidOkzM`
Ex 36-37 page 48

4.4 Équations et inéquations.

Proposition 3. *Soit x et y deux réels, on a alors :*

- $q^x = q^y \Leftrightarrow x = y$
- *si* $q > 1$ *alors* $q^x \geqslant q^y \Leftrightarrow x \geqslant y$
- *si* $0 < q < 1$ *alors* $q^x \geqslant q^y \Leftrightarrow x \leqslant y$

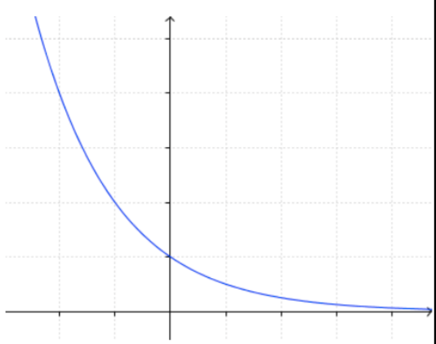
Ex 39 ;42 page 48

4.5 Variation de la fonction exponentielle de base q.

Si $0 < q < 1$
La fonction exponentielle en base q :

$$x \mapsto q^x$$

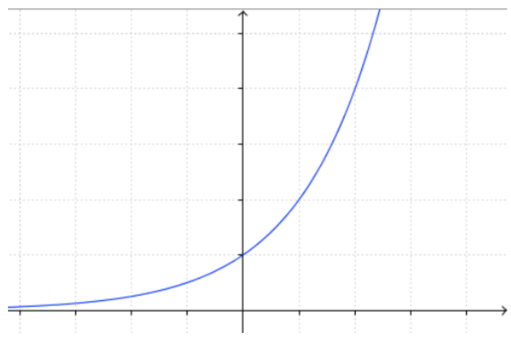
est strictement décroissante :



Si $1 < q$
La fonction exponentielle en base q :

$$x \mapsto q^x$$

est strictement croissante :



Remarque 2. La fonction exponentielle de base 1 est constante.

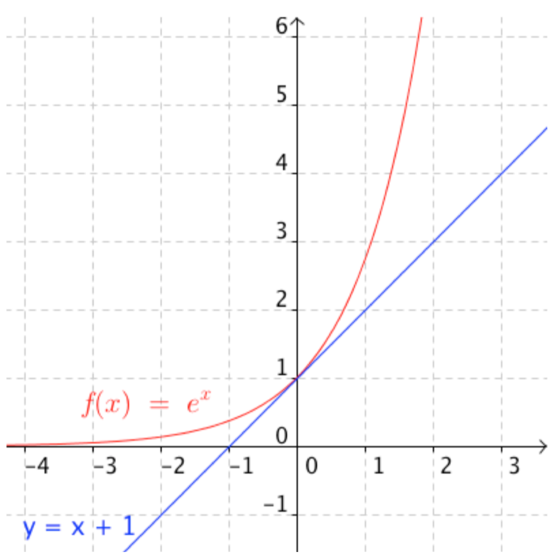
Remarque 3. Le seul points commun à deux représentations deux deux fonction exponentielle est le point de coordonnées $(0; 1)$.

Méthode 2. Variation `https://youtu.be/YQoR7CFM_1U` ; Utilisation `https://youtu.be/maK64g-y3gA`
Ex 44 ;45 page 48

5 Fonction exponentielle. (de base e)

5.1 De la fonction exponentielle

Définition 2. Sur l'ensemble des fonctions exponentielles de base q celle dont la tangente en 0 est de coefficient directeur 1 est appelée simplement **fonction exponentielle**.



Définition 3. Le nombre q de la base exponentielle correspondante est noté simplement e. On a $\mathrm{e} \simeq 2,71$.

Définition 4. La fonction exponentielle a aussi noté de la manière fonctionnelle :

$$\exp : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathrm{e}^x \end{array}$$

Remarque 4. : On a donc $\exp(1) = \mathrm{e} \simeq 2,71$. (voir représentation graphique ci-dessus)

5.2 Propriétés algébriques et fonctionnelles.

Proposition 4. *Si l'on reprend les propriétés de la partie précédente avec l'écriture fonctionnelle, pour tous x et y réels :*

- $\exp(0) = 1$ *(traduction de $e^0 = 1$)*
- $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$ *(traduction de $e^{x+y} = e^x \times e^y$)*
- $\exp(y - x) = \dfrac{\exp(y)}{\exp(x)}$ *(traduction de $e^{y-x} = \frac{e^y}{e^x}$)*
- $\exp(x)^y = exp(xy)$ *(traduction de $(e^x)^y = e^{xy}$)*

Méthode 3. Simplification d'expressions : `https://youtu.be/qDFjeFyA_OY`
48-49 page 49

5.3 Dérivabilité de la fonction exp.

Proposition 5. *La fonction exp est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est elle-même :*

$$\exp'(x) = \exp(x)$$

Proposition 6. *Si l'on considère une fonction u dérivable alors :*

$$exp(u(x))' = u' \times \exp(x)$$

Que l'on note aussi : $(e^u)' = u'e^u$.

Méthode 4. Calcul de fonction dérivée `https://youtu.be/XcMePHk6Ilk` et `https://youtu.be/5G4Aa8gKH_o`
Ex 56 page 49

5.4 Tableau de variations.

On a le tableau de variation de la fonction exp :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp(x)$		$+$	
$\exp(x)$	0	$\nearrow$ 1 $\nearrow$	$+\infty$

Proposition 7. *La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*

Proposition 8. *On a les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to -\infty} exp(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} exp(x) = +\infty$.*

Méthode 5. Étude de fonction `https://youtu.be/_MA1aW8ldjo` et `https://youtu.be/Q4cqUJrTPZo`.
Livre Page 43
Ex 54 ;58 page 49 / 65 page 50 / 68 ;69 page 51

5.5 Équations et inéquations.

Proposition 9. *Puisque l'exponentielle est strictement croissante, pour a et b deux réels :*

- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b.$
- $e^a \leqslant e^b \Leftrightarrow a \leqslant b.$

Méthode 6. Résoudre une équation ou une : `https://youtu.be/dA73-HT-I_Y` et `https://youtu.be/d28Fb-zBe4Y`
Ex 50-51 page 49