Correction DS 1 : Suite numérique. TES1

Exercice 1. On considére la suite (un) définie par $u_0 = 65$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,8u_n + 18$

1. Calculer $u_1 = u_0 \times 65 + 18 = 70$ et $u_2 = 74$.
2. Pour tout entier naturel n, on pose : $v_n = u_n - 90$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $0,8$. On précisera la valeur de v_0.
   On a $v_n = u_n - 90 \Leftrightarrow u_n = v_n + 90$.
   $v_{n+1} = u_{n+1} - 90 = 0,8u_n + 18 - 90 = 0,8(v_n + 90) - 72 = 0,8v_n + 72 - 72 = 0,8v_n$.
   Comme $v_{n+1} = 0,8v_n$, la suite (v_n) est géométrique de raison $0,8$.
   On a $v_0 = u_0 - 90 = 65 - 90 = -25$. On a donc $v_n = -25 \times 0,8^n$.
   (b) Démontrer que, pour tout entier naturel n : $u_n = 90 - 25 \times 0,8^n$. On a $u_n = v_n + 90 = 90 - 25 \times 0,8^n - 24$
3. On considère l'algorithme ci-dessous :

ligne 1	$u \leftarrow 65$
ligne 2	$n \leftarrow 0$
ligne 3	Tant que $u \leqslant 85$
ligne 4	$n \leftarrow n + 1$
ligne 5	$u \leftarrow 0,8 \times u - 90$
ligne 6	Fin de Tant que

   (a) Recopier et compléter les ligne 3 et 5 de cet algorithme afin qu'il détermine le plus petit entier naturel n tel que $u_n > 85$.
   Ici la valeur de u est initialement u_0 puis a chaque boucle on effectue $0,8u - 90$. On calcul donc le terme suivant que l'on réaffecte à u. Les valeurs de la suite sont ainsi successivement calculé ainsi que l'indice correspondant par la ligne "$n \leftarrow n + 1$". Cette boucle est répété jusqu'à ce que la valeur de la suite dépasse 85, on obtient alors le première indice pour lequel u_n dépasse 85.
   (b) Quelle est la valeur de la variable n à la fin de exécution de l'algorithme ?

• $n = 0$	$u_0 = 65$	$u_0 < 85$	vrai
• $n = 1$	$u_1 = 70$	$u_1 < 85$	vrai
• $n = 2$	$u_2 = 74$	$u_2 < 85$	vrai
• $n = 3$	$u_3 = 77{,}2$	$u_3 < 85$	vrai
• $n = 4$	$u_4 = 79{,}76$	$u_4 < 85$	vrai
• $n = 5$	$u_5 = 81{,}808$	$u_5 < 85$	vrai
• $n = 6$	$u_6 = 83{,}4464$	$u_6 < 85$	vrai
• $n = 7$	$u_7 = 84{,}75712$	$u_7 < 85$	vrai
• $n = 8$	$u_8 = 85{,}805696$	$u_8 > 85$	faux

   Lorsque l'exécution de l'algorithme prend fin, la variable n prend la valeur 8.

4. La société Biocagette propose la livraison hebdomadaire d'un panier bio qui contient des fruits et des légumes de saison issus de l'agriculture biologique. Les clients ont la possibilité de recevoir chaque semaine ce panier bio. En juillet 2017, 65 particuliers ont souscrit cet abonnement. Les responsables de la société, Biocagette font les hypothèses suivantes :
   - d'un mois à l'autre, environ 20 % des abonnements sont résiliés ;
   - chaque mois, 18 particuliers supplémentaires souscrivent à l'abonnement.

   (a) Justifier que la suite (u_n) permet de modéliser le nombre d'abonnés au panier bio le $n^{ième}$ mois qui suit le mois de juillet 2017.
   Si l'on note u_n le nombre d'abonnement souscrit au $n^{ième}$ mois après le mois de juillet 2017.
   $$u_{n+1} = \underbrace{(1 - 0,2) * u_n}_{20\%\ des\ abonnements\ sont\ résiliés} + \underbrace{18}_{18\ particuliers supplémentaires\ souscrivent\ à\ l'abonnement.} = 0,8u_n + 18$$
   (b) Selon ce modèle, la recette mensuelle de la société Biocagette va-t-elle dépasser 4420 € durant l'année 2018 ? Justifier la réponse.
   Si on note r_n la recette mensuelle de la société Biocagette au $n^{ième}$ mois après le mois de juillet 2017, on a $r_n = u_n \times 52$ en euros.
   $r_n \geqslant 4420 \Leftrightarrow u_n \times 52 \geqslant 4420 \Leftrightarrow u_n \geqslant 85 \underbrace{\Leftrightarrow}_{voir\ 3b} n \geqslant 8$

(c) Selon le modèle, vers quelle valeur tend la recette mensuelle de la société Biocagette ? Argumenter la réponse.
On a $u_n = 90 - 25 \times 0,8^n$.
Or $0 < 0,8 < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,8^n = 0$.
Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} -25 \times 0,8^n = 0$ et enfin $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 90 - 25 \times 0,8^n = 90$.
Il semble que le nombre d'abonnements tend à s'approcher de 90 abonnements mensuels. Soit donc une recette de $90 \times 52 = 4680$ €.

Exercice 2. On pose $S_n = \frac{4}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + ... + \left(\frac{4}{5}\right)^n$.

On a la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique $1^{ier} terme \dfrac{1-q^{nb\ de\ termes}}{1-q}$.

1. Déterminer $S_{10} = \frac{4}{5} \times \dfrac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{10}}{1-\frac{4}{5}} = \frac{4}{5} \times \dfrac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{10}}{\frac{1}{5}} = 4 \times \left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^{10}\right) \simeq 3,57$
2. Déterminer $S_{20} = 4 \times \left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^{20}\right) \simeq 3,95$.
3. Déterminer $\left(\frac{4}{5}\right)^{11} + \left(\frac{4}{5}\right)^{12} + ... + \left(\frac{4}{5}\right)^{20} = S_{20} - S_{10} = 4\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{20} - \left(\frac{4}{5}\right)^{10}\right) \simeq 0,38$
4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.
   On a $0 < \frac{4}{5} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n = 1$. Et enfin $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 4 \times \left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^n\right) = 4$.

Correction Dm 1 : Suite numérique. TES1

Exercice 36 page 24 :
a) Le capital restant sur le compte l'année (2012+n) (c'est-à-dire S_n) est augmenté de 2%. Donc :

$$S_{n+1} = \underbrace{S_n \times (1+0,02)}_{Le\ capital\ restant\ sur\ le\ compte\ l'année\ (2012+n)\ augmenté\ de\ 2\%}$$

. La suite (S_n) est donc une suite géométrique de raison $(1+0,02) = 1,02$ est de premier terme $S_0 = 1000$. On a donc :

$$S_n = q^n \times S_0 = 1,02^n \times 1000$$

b) Le capital disponible sur le compte en $2017 = 2012 + 5$ est donc : $S_5 = 1,02^5 \times 1000 \simeq 1104$ €.
c) On obtient alors :

$$u_{n+1} = \underbrace{u_n \times (1+0,02)}_{u_n\ augmenté\ de\ 2\%} + \underbrace{600}_{Les\ 600\ euros\ en\ plus.}$$

d) Ici nous reconnaissons une suite arithmético-géométrique (ni arithmétique ni géométrique)
Exercice 49 page 25 :
Ici nous utilisons la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique :

$$1^{ier} terme \times \frac{1-q^{nb\ de\ termes}}{1-q}$$

a) $5 + 5\times 0,2 + 5 \times 0,2^2 + ... + 5 \times 0,2^{10} = 5\frac{1-0,2^{11}}{1-0,2} = \frac{5-5\times0,2^{11}}{0,8} = \frac{5}{0,8} - \frac{5}{0,8}\times 0,2^{11} = 6,25 - 6,25 \times 0,2^{11} \simeq 6,25$
b) $0,8+0,8\times1,3+0,8\times1,3^2+...+0,8\times1,3^{15} = 0,8\frac{1-1,3^{16}}{1-1,3} = \frac{0,8-0,8\times1,3^{16}}{-0,3} = \frac{0,8}{-0,3} - \frac{0,8}{-0,3}\times1,3^{11} = \frac{-8}{3} + \frac{8}{3}\times1,3^{16} \simeq 174,78$.
c) $4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3^2} + ... + \frac{4}{3^{10}} = 4 \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^1 1}{1-\frac{1}{3}} \simeq 6$.
d) $1 + \underbrace{\dfrac{7}{10} + \dfrac{7}{10^2} + ... + \dfrac{7}{10^8}}_{Suite\ géométrique} = 1 + 7 \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^8}{1-\frac{1}{10}} \simeq 8,78$.

Ex 84 page 31.

1. On obtient le tableau :

Année	2006	2007	2008	2009
Fréq moy journalière	2678	2879	3085	3327
Taux d'accroissement	7,5 %	7,5 %	7,5 %	

   On constate que le taux annuel est toujours le même de 7,5 %.
2. Chaque mois la fréquentation subit une augmentation de 7,5 % .

(a) On obtient donc la fréquentation à l'année $2006 + (n+1)$ en augmentant la fréquentation de l'année $2006 + n$ de 7,5%. On obtient donc $un + 1 = (1 + 0,75) \times u_n = 1,075 u_n$. La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison 1,075 et de premier terme $u_0 = 2678$.

(b) Donc $u_n = q^n \times u_0 = 1,075^n \times 2678$.

3. Utilisation de la formule en fonction de n.
4. On a $2015 = 2006 + 9$. Donc la fréquentation journalière moyenne en 2015 est donc de :

$$u_9 = 1,075^9 \times 2678 \simeq 5134 \textit{ individus}$$

5. On obtient : $u_1 1 \simeq 5933$ et $u_1 2 \simeq 6378$. Donc le nombre moyen journalier dépassera 6000 connexions, l'année 2018 (=2006+12)

Exercice 3. La suite (u_n) est géométrique de raison 0,9 et de premier terme 10.

1. Déterminer u_1, u_2, $u_1 0$ et $u_5 0$.
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
   On notera dans la suite $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$.
3. Déterminer :
   (a) $S_7 = u_0 + u_1 + ... + u_7$
   (b) $u_3 + u_4 + ... + u_{12}$
4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 4. Calculer $3^4 + 3^5 + ... + 3^1 2$

Exercice 5. Calculer $5 + 7 + 9 + ... + 55$

Interrogation suite géométrique

Exercice 6. La suite (u_n) est géométrique de raison 0,7 et de premier terme 100.

1. Déterminer $u_1 = 100 \times 0,7 = 70$, $u_2 = 70 \times 0,7 = 49$, $u_{10} \simeq 2,82$ et $u_{50} = 0,7^{50} \times 100 \simeq 1,8 \times\ 10^{-6}$.
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
   Comme $0 < 0,7 < 1$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,7^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
   On notera dans la suite $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$. On a

$$1^{ier} terme \times \frac{1 - q^{nb\ de\ termes}}{1-q}$$

3. Déterminer :
   (a) $S_8 = u_0 + u_1 + ... + u_8 = 100 \times \dfrac{1 - 0,7^9}{1 - 0,7} \simeq 323,9$.
   (b) $u_3 + u_4 + ... + u_{12} = u_3 \frac{1-0,7^{12-3+1}}{1-0,7} = 0,7^3 \times 100 \times \frac{1-0,7^{10}}{1-0,7} = 111,1$
4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.
   Comme $0 < 0,7 < 1$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,7^n = 0$. On a

$$S_n = 100 \times \frac{1 - 0,7^n}{1 - 0,7}$$

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - 0,7^n = 1$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1 - 0,7^n}{1 - 0,7} = \frac{1}{1-0,7} = \frac{1}{0,3}$ Et enfin :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{100}{0,3} \simeq 333$$

Exercice 7. Calculer $2^2 + 2^3 + ... + 2^8 = 2^2 \times \dfrac{2^7 - 1}{2 - 1} = 4 \times 127 = 508$

Exercice 8. Calculer $5 + 8 + 11 + ... + 35$.

On a ici une progression arithmétique de raison 3. Pour déterminer le nombre de termes : $\dfrac{35-5}{3} + 1 = 10 + 1 = 11$. Il y a donc 11 termes.

$$5 + 8 + 11 + ... + 35 = \frac{5 + 35}{2} \times 11 = 220$$

.