

Exemples de démonstrations du chapitre orthogonalité et distance dans l'espace.

Exercice 1. Soient A un point de l'espace, \mathcal{P} un plan de l'espace, H le projeté orthogonal de A sur \mathcal{P} .

Objectif : Montrer que H est le point de \mathcal{P} le plus proche de A .

Considérons M un point du plan \mathcal{P} distinct de H .

1. Dans cette question l'on considère que $A \notin \mathcal{P}$.
 - (a) Que peut-on dire du triangle AHM ? Justifier.
 - (b) Utiliser alors le théorème bien connu dans ce cas pour montrer que $AM \geq AH$.
 - (c) Dans quel cas a-t-on égalité $AM = AH$?
2. Dans cette question l'on considère que $A \in \mathcal{P}$. Justifier que $AM \geq AH$.
3. Conclure.

Exercice 2. Soient A un point de l'espace, \mathcal{P} un plan de l'espace, \vec{n} un vecteur normal de \mathcal{P} , H le projeté orthogonal de A sur \mathcal{P} . On note d la droite passant par A et de vecteur directeur \vec{n} et B un point du plan \mathcal{P} .

Objectif : Montrer que $AH = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$.

1. Déterminer $\overrightarrow{HB} \cdot \vec{n}$.
2. Montrer que $|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}| = \|\vec{n}\| \times AH$.
3. En déduire que :

$$AH = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

Exercice 3. Soient A un point de l'espace, d une droite de l'espace, \vec{u} un vecteur directeur de la droite d . Soit H le projeté orthogonal de A sur d .

Objectif : Montrer que H est le point de d le plus proche de A .

Soit M un point de d distinct de H .

1. Dans cette question nous considérons que $A \notin d$.
 - (a) Que peut-on dire du triangle AHM ? Justifier.
 - (b) Utiliser alors le théorème bien connu dans ce cas pour montrer que $AM \geq AH$.
 - (c) Dans quel cas a-t-on égalité $AM = AH$?
2. Dans cette question l'on considère que $A \in d$. Justifier que $AM \geq AH$.
3. Conclure.

Exercice 4. Soient A un point de l'espace, d une droite de l'espace, \vec{u} un vecteur directeur de la droite d et $\vec{v} = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u}$ (donc \vec{v} est un vecteur directeur unitaire de la droite d . On remarquera que $\vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\|^2 = 1$)

Soit H le projeté orthogonal de A sur d et B un point de d .

Objectif : Démontrer que $AH = \left\| \overrightarrow{AB} - \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} \right\|$

1. Justifier qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{BH} = k\vec{v}$, puis que $k = \overrightarrow{BH} \cdot \vec{v}$.
2. En utilisant que $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH}$, montrer que $\overrightarrow{BH} = -\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}$
3. En déduire que : $AH = \left\| \overrightarrow{AB} - \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} \right\|$

Exercice 5. Soient A un point de l'espace, d une droite de l'espace, \vec{u} un vecteur directeur de la droite d et $\vec{v} = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u}$ (donc \vec{v} est un vecteur directeur unitaire de la droite d . On remarquera que $\vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\|^2 = 1$)

Soit H le projeté orthogonal de A sur d et B un point de d .

Objectif : Démontrer que $AH = \left\| \vec{AB} - \frac{\vec{AB} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} \right\|$

1. Justifier qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{BH} = k\vec{v}$, puis que $k = \vec{BH} \cdot \vec{v}$.

2. On considère les étiquettes :

Pour les égalités :

$$= \|\vec{AB} + \vec{BH}\|$$

$$= -(\vec{AB} \cdot \vec{v}) \vec{v}$$

$$= \left\| \vec{AB} - \frac{\vec{AB} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} \right\|$$

$$= \left((\vec{BA} + \vec{AH}) \cdot \vec{v} \right) \vec{v}$$

$$= -\frac{\vec{AB} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}$$

$$= (\vec{BH} \cdot \vec{v}) \vec{v}$$

$$= (\vec{BA} \cdot \vec{v} + \vec{AH} \cdot \vec{v}) \vec{v}.$$

Pour les justifications.

Linéarité du produit scalaire

Relation de Chasles

puisque $\vec{BA} = -\vec{AB}$

puisque $\vec{AH} \perp \vec{v}$

D'après la question 1

Utiliser les étiquettes précédentes pour répondre aux questions ci-dessous. Certaines étiquettes de justifications peuvent être utilisées plusieurs fois.

(a) Montrer que $\vec{BH} = -\frac{\vec{AB} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}$

	Egalités	Justifications
\vec{BH}

(b) Conclure. Donc : $AH =$

Exercice 6. 1. Déterminer la distance du point $A(1, 1, 1)$ aux plans définis par :

\mathcal{P} : passant par O, de vecteur normal $\vec{u} : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ puis \mathcal{P}' : passant par $B(-1, 0, 0)$, de vecteur normal $\vec{v} : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Déterminer la distance du point $A(1, 1, 1)$ aux droites définies par :

\mathcal{D} : passant par O, de vecteur directeur $\vec{u} : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ puis \mathcal{D}' : passant par $B(1, 0, 0)$, de vecteur directeur $\vec{v} : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$